Packings induits de cycles

Aistis Atminas, Marcin Kamiński, Jean-Florent Raymond

16^{e} Journées Graphes et Algorithmes, Dijon
13 novembre 2014

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

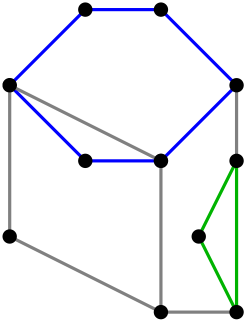
Laboratoire
Informatique
Robotique
Microélectronique
Montpellier

THE UNIVERSITY OF WARWICK

Dans cet exposé : G *contient-il* k *cycles ?*

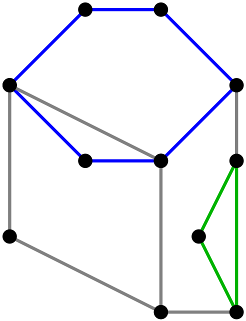
Quel type de packing ?

Quel type de packing ?

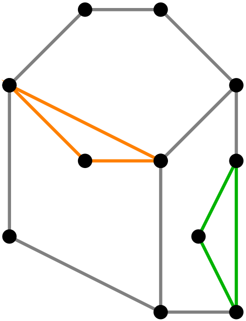


Sommet-disjoint

Quel type de packing ?



Sommet-disjoint



Induit

Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe assez gros contient k cycles induits.

Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe assez gros contient k cycles induits.

Toujours possible ?

Non :

Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe assez gros contient k cycles induits.

Toujours possible ?

Non :

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

Réduction :

$$\bullet \qquad \longrightarrow \qquad \emptyset$$

Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe réduit assez gros contient k cycles induits.

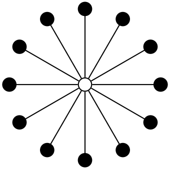
Toujours possible ?

Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe réduit assez gros contient k cycles induits.

Toujours possible ?

Non :

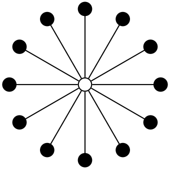


Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe réduit assez gros contient k cycles induits.

Toujours possible ?

Non :



Réduction :

Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe réduit assez gros contient k cycles induits.

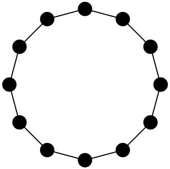
Toujours possible ?

Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe réduit assez gros contient k cycles induits.

Toujours possible ?

Non :

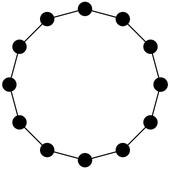


Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe réduit assez gros contient k cycles induits.

Toujours possible ?

Non :



Réduction :

Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe réduit assez gros contient k cycles induits.

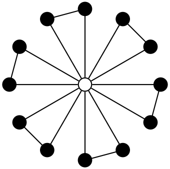
Toujours possible ?

Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe réduit assez gros contient k cycles induits.

Toujours possible ?

Non :

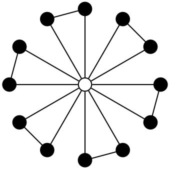


Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe réduit assez gros contient k cycles induits.

Toujours possible ?

Non :



Solution : Borner $|G|$ en fonction de Δ.

Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe réduit $\geqslant h_k(\Delta)$ contient k cycles induits.

Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe réduit $\geqslant h_k(\Delta)$ contient k cycles induits.

Réductions :

- supprimer les sommets de degré $\leqslant 1$;
- contracter les arêtes redondantes.

Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe réduit $\geqslant h_k(\Delta)$ contient k cycles induits.

Réductions :

- supprimer les sommets de degré $\leqslant 1$;
- contracter les arêtes redondantes.

Remarques :

- ne supprime ni n'introduit de cycles ;
- réduction en temps linéaire.

Un objectif simple

Objectif : mq tout graphe réduit $\geqslant h_k(\Delta)$ contient k cycles induits.

Réductions :

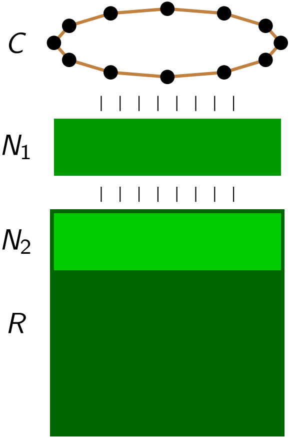
- supprimer les sommets de degré $\leqslant 1$;
- contracter les arêtes redondantes.

Remarques :

- ne supprime ni n'introduit de cycles ;
- réduction en temps linéaire.

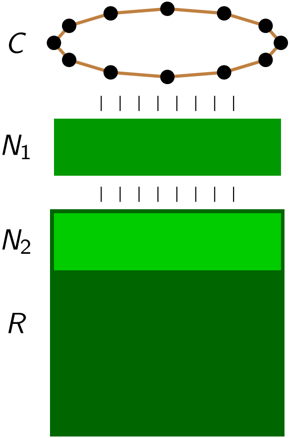
Idée générale : par induction.

Peu de cycles induits $\Rightarrow$ graphe petit



$G \not\supseteq k$ cycles induits et h_{k-1} existe (HR) :

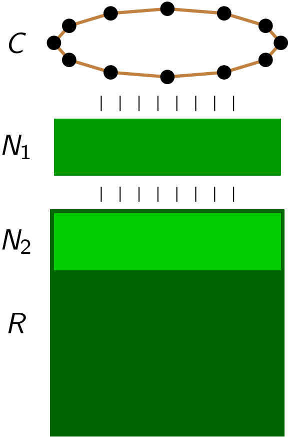
Peu de cycles induits $\Rightarrow$ graphe petit



$G \not\supseteq k$ cycles induits et h_{k-1} existe (HR) :

a) $R \not\supseteq (k-1)$ cycles induits ;

Peu de cycles induits ⇒ graphe petit

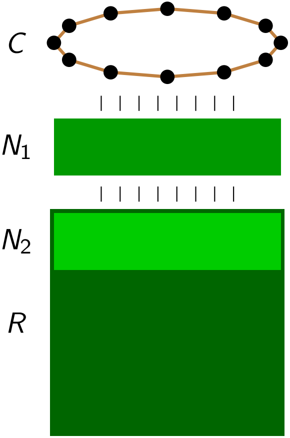


$G \not\supseteq k$ cycles induits et h_{k-1} existe (HR) :

a) $R \not\supseteq (k-1)$ cycles induits ;

b) $|R| \leqslant h_{k-1}(\Delta)$;

Peu de cycles induits $\Rightarrow$ graphe petit



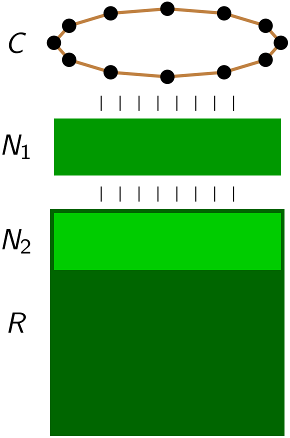
$G \not\supseteq k$ cycles induits et h_{k-1} existe (HR) :

a) $R \not\supseteq (k-1)$ cycles induits ;

b) ~~$|R| \leqslant h_{k-1}(\Delta)$;~~

c) $|R| \leqslant 4|N_2| + h_{k-1}(\Delta)$;

Peu de cycles induits $\Rightarrow$ graphe petit



$G \not\supseteq k$ cycles induits et h_{k-1} existe (HR) :

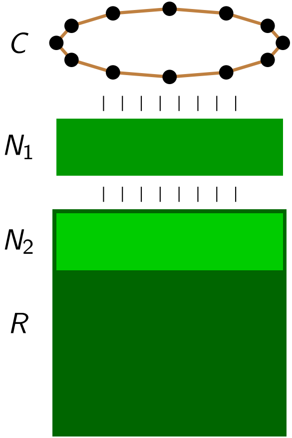
a) $R \not\supseteq (k-1)$ cycles induits ;

b) $\cancel{|R| \leqslant h_{k-1}(\Delta)}$;

c) $|R| \leqslant 4|N_2| + h_{k-1}(\Delta)$;

$$\begin{aligned} |G| &= |C| + |N_1| + |R| \\ &\leqslant 4g\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta) \end{aligned}$$

Peu de cycles induits $\Rightarrow$ graphe petit



$G \not\supseteq k$ cycles induits et h_{k-1} existe (HR) :

a) $R \not\supseteq (k-1)$ cycles induits ;

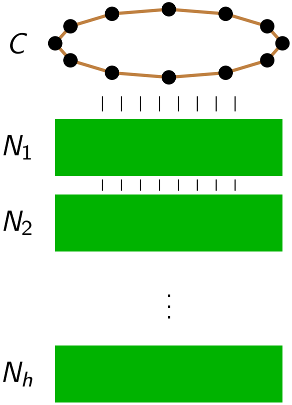
b) $\cancel{|R| \leqslant h_{k-1}(\Delta)}$ ~~;~~

c) $|R| \leqslant 4|N_2| + h_{k-1}(\Delta)$;

$$\begin{aligned} |G| &= |C| + |N_1| + |R| \\ &\leqslant 4g\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta) \end{aligned}$$

1. G réduit sans $k \geqslant 2$ cycles induits $\Rightarrow |G| \leqslant 4g\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta)$.

À grande maille, grande taille

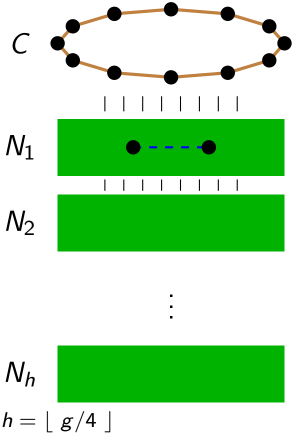


$h = \lfloor g/4 \rfloor$

Lorsque la maille d'un graphe réduit est grande :

1. ni arête redondante ni degré < 2 ($\sim \ \delta \geqslant 3$) ;
2. pas de petits cycles.

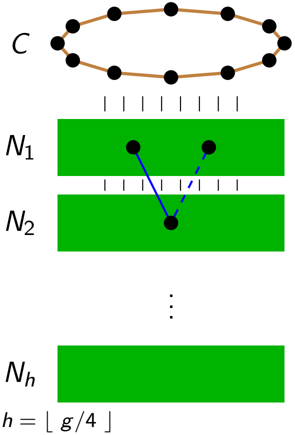
À grande maille, grande taille



Lorsque la maille d'un graphe réduit est grande :

1. ni arête redondante ni degré < 2 $(\sim \ \delta \geqslant 3)$;
2. pas de petits cycles.

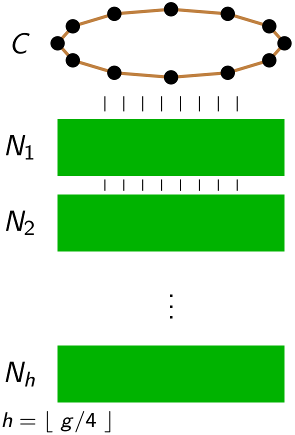
À grande maille, grande taille



Lorsque la maille d'un graphe réduit est grande :

1. ni arête redondante ni degré < 2 ($\sim \ \delta \geqslant 3$) ;
2. pas de petits cycles.

À grande maille, grande taille

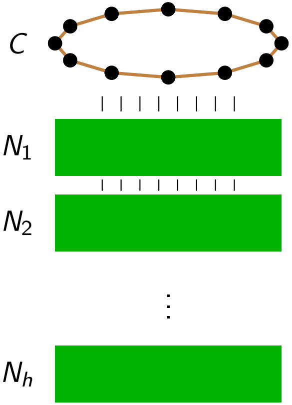


Lorsque la maille d'un graphe réduit est grande :

1. ni arête redondante ni degré < 2 ($\sim\ \delta \geqslant 3$) ;
2. pas de petits cycles.

$\rightsquigarrow$ expansion: $|N_{i+2}| \geqslant 2|N_i|$.

À grande maille, grande taille



$h = \lfloor g/4 \rfloor$

Lorsque la maille d'un graphe réduit est grande :

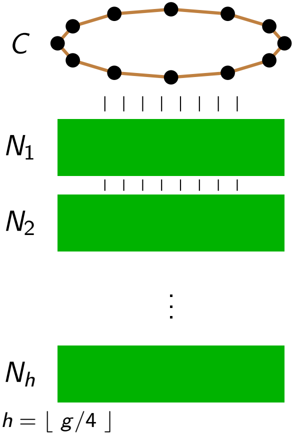
1. ni arête redondante ni degré < 2 ($\sim \ \delta \geqslant 3$) ;
2. pas de petits cycles.

$\rightsquigarrow$ expansion: $|N_{i+2}| \geqslant 2|N_i|$.

Conséquence :

$$|G| \geqslant |C| + \textstyle\sum_i |N_i| \geqslant g \cdot 2^{\lfloor g/8 \rfloor - 1}.$$

À grande maille, grande taille



Lorsque la maille d'un graphe réduit est grande :

1. ni arête redondante ni degré < 2 ($\sim \delta \geqslant 3$) ;
2. pas de petits cycles.

$\rightsquigarrow$ expansion: $|N_{i+2}| \geqslant 2|N_i|$.

Conséquence :

$$|G| \geqslant |C| + \sum_i |N_i| \geqslant g \cdot 2^{\lfloor g/8 \rfloor - 1}.$$

$\boxed{\textbf{2. } G \text{ réduit et } g \geqslant 6 \Rightarrow |G| \geqslant g \cdot 2^{\lfloor g/8 \rfloor - 1}.}$

Collision

G réduit sans k cycles mutuellement induits.

2.

$$g \cdot 2^{\lfloor \; g/8 \; \rfloor - 1} \qquad \leqslant |G|$$

Collision

G réduit sans k cycles mutuellement induits.

$$|G| \leqslant \overset{\textbf{1.}}{\quad} 4g\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta)$$

Collision

G réduit sans k cycles mutuellement induits.

$$g \cdot 2^{\lfloor g/8 \rfloor - 1} \overset{\mathbf{2.}}{\leqslant} |G| \overset{\mathbf{1.}}{\leqslant} 4g\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta)$$

Collision

G réduit sans k cycles mutuellement induits.

$$\underbrace{g \cdot 2^{\lfloor g/8 \rfloor - 1}}_{\Omega(g \cdot 2^{g})} \overset{\textbf{2.}}{\leqslant} |G| \overset{\textbf{1.}}{\leqslant} \underbrace{4g\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta)}_{O(g)}$$

Collision

G réduit sans k cycles mutuellement induits.

$$\underbrace{g \cdot 2^{\lfloor g/8 \rfloor - 1}}_{\Omega(g \cdot 2^g)} \overset{\textbf{2.}}{\leqslant} |G| \overset{\textbf{1.}}{\leqslant} \underbrace{4g\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta)}_{O(g)}$$

Collision sauf si $g \leqslant 8(2 + \log(4\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta)))$

Collision

G réduit sans k cycles mutuellement induits.

$$\underbrace{g \cdot 2^{\lfloor g/8 \rfloor - 1}}_{\Omega(g \cdot 2^g)} \overset{\textbf{2.}}{\leqslant} |G| \overset{\textbf{1.}}{\leqslant} \underbrace{4g\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta)}_{O(g)}$$

Collision sauf si $g \leqslant 8(2 + \log(4\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta)))$

$$\rightsquigarrow \ |G| \leqslant 32\Delta^2(2 + \log(4\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta))) + h_{k-1}(\Delta)$$

Collision

G réduit sans k cycles mutuellement induits.

$$\underbrace{g \cdot 2^{\lfloor g/8 \rfloor - 1}}_{\Omega(g \cdot 2^g)} \overset{\textbf{2.}}{\leqslant} |G| \overset{\textbf{1.}}{\leqslant} \underbrace{4g\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta)}_{O(g)}$$

Collision sauf si $g \leqslant 8(2 + \log(4\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta)))$

$$\rightsquigarrow \ |G| \leqslant 32\Delta^2(2 + \log(4\Delta^2 + h_{k-1}(\Delta))) + h_{k-1}(\Delta)$$

$$\vdots$$

$$h_k(d) \leqslant 96d^2k\log(32d^2k)$$

4. G réduit sans $k \geqslant 2$ cycles induits $\Rightarrow |G| \leqslant 96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$.

En résumé

Théorème (Atminas, Kamiński, R. 2014)

Tout graphe réduit sans k cycles mutuellement induits a au plus $96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$ sommets.

En résumé

Théorème (Atminas, Kamiński, R. 2014)

Tout graphe réduit sans k cycles mutuellement induits a au plus $96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$ sommets.

Améliorable ?

En résumé

Théorème (Atminas, Kamiński, R. 2014)

Tout graphe réduit sans k cycles mutuellement induits a au plus $96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$ sommets.

Améliorable ?

Lemme

Il y a des graphes réduits sans k cycles avec $\Theta(k\Delta^2)$ sommets.

En résumé

Théorème (Atminas, Kamiński, R. 2014)

Tout graphe réduit sans k cycles mutuellement induits a au plus $96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$ sommets.

Améliorable ?

Lemme

Il y a des graphes réduits sans k cycles avec $\Theta(k\Delta^2)$ sommets.

Intéressant ?

La complexité paramétrée en bref

- Problème paramétré:
- FPT:
- $f(k)$-noyau:

La complexité paramétrée en bref

- Problème paramétré: $\{(x, k), \dots\} \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$;
- FPT:
- $f(k)$-noyau:

La complexité paramétrée en bref

- Problème paramétré: $\{(x, k), \dots\} \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$;
- FPT: $f(k)n^{O(1)}$;
- $f(k)$-noyau:

La complexité paramétrée en bref

- Problème paramétré: $\{(x, k), \dots\} \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$;
- FPT: $f(k)n^{O(1)}$;
- $f(k)$-noyau: polytime $(x, k) \mapsto (y, k')$ t.q. $y, k' \leqslant f(k)$
  et $(x, k) \Leftrightarrow (y, k')$;

Cycles Induits

Le problème Cycles Induits:

Étant donné (G, k), G contient-il k cycles mutuellement induits ?

Cycles Induits

Le problème Cycles Induits:

Étant donné (G, k), G contient-il k cycles mutuellement induits ?

n'admet pas de noyau quand paramétré par k ou par Δ.

(sous certaines hypothèses de complexité)

Cycles Induits

Le problème Cycles Induits:

Étant donné (G, k), G contient-il k cycles mutuellement induits ?

n'admet pas de noyau quand paramétré par k ou par Δ.

(sous certaines hypothèses de complexité)

Corollaire (Atminas, Kamiński, R., 2014)

Cycles Induits *a un* $O(\Delta^2 k \log \Delta k)$*-noyau quand param. par* Δ *et* k.

Le noyau

Entrée : (G, k)
Sortie : instance équivalente d'ordre $\leqslant 96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$

Le noyau

Entrée : (G, k)
Sortie : instance équivalente d'ordre $\leqslant 96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$

- réduit $|G|$ en temps $O(n)$;
- si $|G| > 96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$,

  alors retourne $(k \cdot K_3, k)$;
  sinon retourne (G, k).

Le noyau

Entrée : (G, k)
Sortie : instance équivalente d'ordre $\leqslant 96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$

- réduit $|G|$ en temps $O(n)$;
- si $|G| > 96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$,

  alors retourne $(k \cdot K_3, k)$;
  sinon retourne (G, k).

Remarques :

- deux paramètres : k et Δ;

Le noyau

Entrée : (G, k)
Sortie : instance équivalente d'ordre $\leqslant 96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$

- réduit $|G|$ en temps $O(n)$;
- si $|G| > 96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$,

  alors retourne $(k \cdot K_3, k)$;
  sinon retourne (G, k).

Remarques :

- deux paramètres : k et Δ;
- constantes explicites ;

Le noyau

Entrée : (G, k)
Sortie : instance équivalente d'ordre $\leqslant 96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$

- réduit $|G|$ en temps $O(n)$;
- si $|G| > 96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$,
  alors retourne $(k \cdot K_3, k)$;
  sinon retourne (G, k).

Remarques :

- deux paramètres : k et Δ;
- constantes explicites ;
- temps linéaire ;

Le noyau

Entrée : (G, k)
Sortie : instance équivalente d'ordre $\leqslant 96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$

- réduit $|G|$ en temps $O(n)$;
- si $|G| > 96\Delta^2 k \log(32\Delta^2 k)$,
  alors retourne $(k \cdot K_3, k)$;
  sinon retourne (G, k).

Remarques :

- deux paramètres : k et Δ;
- constantes explicites ;
- temps linéaire ;
- seulement un contrôle de taille (vraiment un noyau ?).

Comparaison avec Cycles Disjoints

Cycles Induits:

- **pas** de noyau en général (paramétré par k ou Δ) ;
- $O(\Delta^2 k \log \Delta k)$-noyau quand paramétré par k et Δ.

Comparaison avec Cycles Disjoints

Cycles Induits:

- **pas** de noyau en général (paramétré par k ou Δ) ;
- $O(\Delta^2 k \log \Delta k)$-noyau quand paramétré par k et Δ.

Cycles Disjoints (paramétrisé par k) :

- FPT (test de mineurs) [GM] ;

Comparaison avec Cycles Disjoints

Cycles Induits:

- **pas** de noyau en général (paramétré par k ou Δ) ;
- $O(\Delta^2 k \log \Delta k)$-noyau quand paramétré par k et Δ.

Cycles Disjoints (paramétrisé par k) :

- FPT (test de mineurs) [GM] ;
- **pas** de noyau polynomial en général [Bodlaender et al. 2009]
  (sauf si $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{coNP/poly}$) ;

Comparaison avec Cycles Disjoints

Cycles Induits:

- **pas** de noyau en général (paramétré par k ou Δ) ;
- $O(\Delta^2 k \log \Delta k)$-noyau quand paramétré par k et Δ.

Cycles Disjoints (paramétrisé par k) :

- FPT (test de mineurs) [GM] ;
- **pas** de noyau polynomial en général [Bodlaender et al. 2009]
  (sauf si $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{coNP/poly}$) ;
- $O(k \log k)$-noyau dans les graphes sans $K_{1,t}$ induit [Fomin et al. 2011].
  $\rightsquigarrow$ $O(\Delta k \log k)$-noyau en général.

Comparaison avec Cycles Disjoints

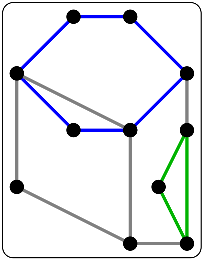
Cycles Induits:

- **pas** de noyau en général (paramétré par k ou Δ) ;
- $O(\Delta^2 k \log \Delta k)$-noyau quand paramétré par k et Δ.

Cycles Disjoints (paramétrisé par k) :

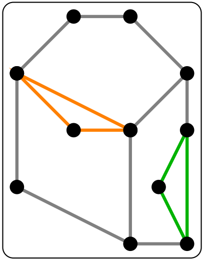
- FPT (test de mineurs) [GM] ;
- **pas** de noyau polynomial en général [Bodlaender et al. 2009] (sauf si NP $\subseteq$ coNP/poly) ;
- $O(k \log k)$-noyau dans les graphes sans $K_{1,t}$ induit [Fomin et al. 2011].
  $\rightsquigarrow$ $O(\Delta k \log k)$-noyau en général.
  en adaptant notre technique : $\rightsquigarrow$ $(56\Delta k \log k)$-noyau en général.

Extensions ?



sommet-disjoint

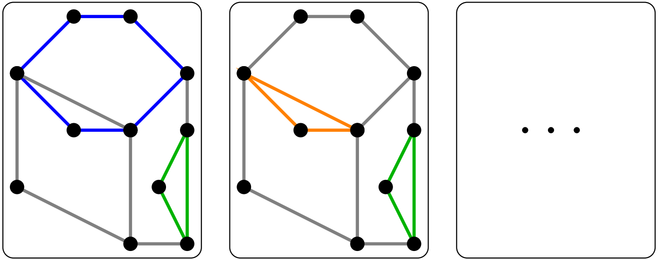
$d \geqslant 1$



Induit

$d \geqslant 2$

Extensions ?



sommet-disjoint	Induit	$\cdots$
$d \geqslant 1$	$d \geqslant 2$	$d > 2$

Perspectives

- $O(\Delta^2 k)$-noyau pour CYCLES INDUITS avec cette technique ?

Perspectives

- $O(\Delta^2 k)$-noyau pour Cycles Induits avec cette technique ?
- packing d'autres objets (longs cycles, longs chemins, modèles de K_4, etc.) ?

Perspectives

- $O(\Delta^2 k)$-noyau pour Cycles Induits avec cette technique ?
- packing d'autres objets (longs cycles, longs chemins, modèles de K_4, etc.) ?

Merci !