

1 Małe Kolokwium

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna 2-krotnie w punkcie 0 oraz $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, to $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) + \beta, & \text{dla } x \geq 0, \\ \alpha x - \frac{x^2}{2}, & \text{dla } x < 0, \end{cases}$$

przy czym $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Rozstrzygnij dla jakich wartości α i β funkcja f jest

- (a) różniczkowalna,
- (b) monotoniczna (niekoniecznie ściśle),
- (c) wklęsła,
- (d) ma ekstrema/ekstremum lokalne.

Dla tych α i β , dla których funkcja f ma przynajmniej jedno ekstremum lokalne, wyznacz jej ekstrema lokalne.