Pisemna praca domowa nr 1

Termin oddawania: 6.11.2019 (na początku zajęć). Zadania można oddawać do mnie osobiście na początku zajęć 6.11.2019, lub w pokoju 5240. Alternatywnie, można je włożyć do mojej przegródki koło sekretariatu na 3 piętrze. Zadania oddane po terminie nie będą oceniane, poza bardzo szczególnymi uzasadnionymi przypadkami. Zadania po 5 pkt.

Zadanie 1 Zbadaj czy ciąg

$$a_n = \left((-1)^n + \frac{1}{3n}\right)^{2n+1}$$

posiada granicę. Jeżeli posiada, to wyznacz ją, a jeśli nie, to wskaż dwa jego podciągi zbieżne do różnych granic (wyznacz granice tych podciągów).

Zadanie 2 Wyznacz kres górny i kres dolny zbioru

$$A = \left\{ \frac{|3^n - k|}{n! + k + 30} : \quad n, k \in \mathbb{N}, 3^n \neq k \right\}.$$

Wyznacz maksimum i minimum zbioru A, o ile istnieją.

Zadanie 3 Niech $a_1 = 1$ oraz niech m będzie ustaloną liczbą ze zbioru $\{0, 1, 2, ...\}$. Niech ponadto

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^m}{1 + a_n}$$

dla $n = 1, 2, 3, ...$ Wyznacz granicę ciągu $\{a_n\}$ lub wykaż, że one nie istnieje **w zależności od** m.

Zadanie 4 (a) [1] Niech $l \in \mathbb{N}$ oraz niech $a^1, a^2, ..., a^l$ będą takimi podciągami[2] ciągu $\{a_n\}$, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich naturalnych $n > N$ istnieje $i \in \{1, 2, ..., l\}$ takie, że $a_n = a_k^i$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Nadto załóżmy, że istnieje $a \in \mathbb{R}$, takie że dla każdego $i \in \{1, 2, ..., l\}$ mamy $a_k^i \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Udowodnij, że wówczas $a_n \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a$.

(b) Wskaż przykład świadczący o tym, że w powyższym stwierdzeniu założenie, że podiągów ciągu $\{a_n\}$ jest skończenie wiele jest istotne *(tzn. wskaż przykład ciągu $\{a_n\}$ i nieskończonej, pokrywającej go rodziny jego podciągów, tak by wszystkie podciągi zbiegały do tej samej granicy, ale sam ciąg $\{a_n\}$ nie był zbieżny).*

[1] Nieprecyzyjne, ale intuicyjne sformułowanie mogłoby brzmieć następująco: Mamy ciąg i jego skończenie wiele podciągów, przy czym wiemy, że każda dostatecznie duża liczba naturalna jest indeksem pewnego z tych podciągów (ciągi indeksów tych podciągów w pewnym sensie „pokrywają" zbiór $\mathbb{N}$. Dodatkowo wszystkie te podciągi zbiegają do tej samej granicy. Wtedy wyjściowy ciąg też do niej zbiega.

[2] **UWAGA:** tutaj a^i oznacza i-ty podciąg, a nie i-tą potęgę liczby a.