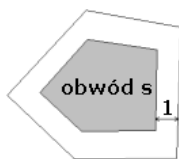


Zadania

1. Jaki jest kąt pomiędzy wskazówkami zegara o godzinie 3:15?
2. Z 8 monet jedna jest lżejsza niż pozostałe. Jak za pomocą dwóch ważeń na wadze szalkowej ustalić, która?
3. Mamy 12 identycznie wyglądających monet, przy czym wiemy, że dokładnie jedna z nich jest fałszywa — lżejsza lub cięższa. Jak w trzech ważeniach na wadze szalkowej stwierdzić, która z monet jest fałszywa oraz czy jest ona lżejsza czy cięższa od monety prawdziwej?
4. W pewnym kraju od dawien dawna każda rodzina bardzo pragnie mieć syna i ma kolejne dzieci tak długo, aż urodzi im się chłopiec. Jeśli rodzi się dziewczynka, rodzą kolejne dzieci „do skutku”. Jeśli rodzi się chłopiec, nie mają już więcej dzieci. Jaka jest w tym kraju proporcja osób płci męskiej do osób płci żeńskiej?
5. (a) Oblicz sumę miar kątów wewnętrznych dowolnego wielokąta wypukłego (w zależności od liczby jego wierzchołków).
(b) Boki wypukłego wielokąta o obwodzie s „rozsunięto” o 1 (rys.).



Wykaż, że pole wzrosło o więcej niż $s + \pi$.

6. Czy w przestrzeni trójwymiarowej istnieje czworościan o wierzchołkach w punktach kratowych (tzn. mających wszystkie współrzędne całkowite) i o objętości 2010 taki, żeby wewnątrz ani na powierzchni tego czworościanu nie było żadnych innych punktów kratowych?
7. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c, x są dodatnie oraz $abc = 1$, to

$$(x + a)(x + b)(x + c) \geq (x + 1)^3.$$
8. Wykaż, że dla dodatnich liczb a, b, c, d prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$
9. Czy wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{2000}$ więcej jest takich, które mają w zapisie dziesiętnym cyfrę 7, czy takich bez 7?
10. Udowodnij, że w każdym roku któryś piątek musi wypaść trzynastego dnia miesiąca.