Twierdzenie Carnota i Stare twierdzenie japońskie

Twierdzenie Ptolemeusza. *Dla dowolnego czworokąta $ABCD$ zachodzi nierówność $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geqslant AC \cdot BD$. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.*

1. (*Twierdzenie Carnota*) Niech r i R będą promieniami okręgów, odpowiednio, opisanego i wpisanego w trójkąt ABC, zaś O niech będzie środkiem okręgu opisanego. Niech x, y, z będą odległościami punktu O od boków, odpowiednio, AB, AC, BC, przy czym jeśli cała najkrótsza droga od O do boku leży poza trójkątem ABC, to odpowiadającą jej odległość uznajemy za ujemną. Udowodnij, że $x+y+z = R+r$.

2. (*Stare twierdzenie japońskie*) Dany jest wielokąt W wpisany w okrąg. Triangulujemy ten wielokąt w dowolny sposób, wpisujemy w każdy z otrzymanych trójkątów okrąg i liczymy sumę długości promieni tych okręgów. Wykaż, że suma ta nie zależy od triangulacji.

Twierdzenie chińskie o resztach

Twierdzenie chińskie o resztach. *Dane są liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$, parami względnie pierwsze oraz liczby całkowite $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Wówczas istnieje liczba naturalna N taka, że $N \equiv r_i (mod\ a_i)$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$.*

3. Udowodnij, że istnieje 2007 kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest pierwsza.

4. Udowodnij, że istnieje 2007 kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku większym od 1.

5. Wykaż, że dla dowolnych liczb p, q, r całkowitych dodatnich, parami względnie pierwszych, równanie

$$x^p + y^q = z^r$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

Literatura:
Henryk Pawłowski, *Twierdzenie Ptolemeusza, twierdzenia Carnota i ciekawostka*, *Delta* nr 1 (248) 1995,
Jarosław Wróblewski, *Twierdzenie chińskie o resztach, czyli ciężarówką po lesie*, *Delta* nr 11 (282) 1997.