

Półniezmienniki

1. (zad. 3 z II etapu LVIII OM) Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n . Każda płytka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: wybieramy płytke P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P . Następnie odwracamy płytke P na drugą stronę. Dla każdego $n \geq 2$ rozstrzygnij, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

2. Na szachownicy $n \times n$ szerzy się epidemia. Na początku zarażonych jest k pól — ognisk epidemii. Jeżeli co najmniej dwóch z czterech sąsiadów nie zarażonego pola jest zarażonych, to ono również staje się zarażone. Znajdź najmniejsze k takie, że zarażona może zostać cała szachownica.

3. Danych jest $2n$ punktów na płaszczyźnie (żadne trzy nie są współliniowe) — n białych i n czarnych. Udowodnij, że punkty te można tak połączyć n odcinkami, aby każdy odcinek miał końce różnych kolorów oraz by żadne dwa odcinki nie miały punktów wspólnych.

4. Na płaszczyźnie danych jest n punktów $A_1, \dots, A_n$, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej oraz n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe. Wykaż, że proste te można oznaczyć przez $l_1, \dots, l_n$ oraz tak wybrać z nich odpowiednio punkty $B_1, \dots, B_n$, aby dla każdego i , $1 \leq i \leq n$, prosta $A_i B_i$ była prostopadła do l_i oraz odcinki $A_i B_i$ były parami rozłączne.

5. W pewnej grupie osób każdy ma co najwyżej trzech wrogów. Udowodnij, że można tę grupę podzielić na dwie tak, by każdy miał w swojej podgrupie co najwyżej jednego wroga.

6. Na dworze króla Artura przebywa $2n$ rycerzy, z których każdy ma wśród pozostałych co najwyżej $n - 1$ wrogów. Wykaż, że Merlin, doradca Artura, może tak rozsadzić rycerzy za Okrągłym Stołem, aby żaden rycerz nie siedział obok swojego wroga.

7. W tablicę o wymiarach $n \times n$ wpisano n^2 liczb rzeczywistych. W jednym ruchu możemy zmienić znaki wszystkich liczb stojących w pewnej kolumnie lub w pewnym wierszu. Udowodnij, że wykonując tylko takie ruchy można spowodować, aby sumy liczb stojących w każdym wierszu i w każdej kolumnie były nieujemne.

8. Rozważmy sytuację taką, jak w poprzednim zadaniu. Czy niezależnie od konfiguracji początkowej można, używając jedynie powyżej zdefiniowanych ruchów, otrzymać po pewnej liczbie kroków tablicę zawierającą same liczby nieujemne?

9. Każda z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ (gdzie $n \geq 2007$) jest równa 1 lub -1 . Spełniona jest równość

$$a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5 a_6 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n a_1 + a_{n-1} a_n a_1 a_2 + a_n a_1 a_2 a_3 = 0.$$

Udowodnij, że liczba n dzieli się przez 4.

10. Załóżmy, że gatunek ludzki nigdy nie wymrze (ale ludzie są śmiertelni). Wykaż, że żyje obecnie kobieta, która w każdym kolejnym pokoleniu będzie miała potomka płci żeńskiej.

11. Na okręgu napisano n liczb naturalnych. Między każdymi dwiema sąsiednimi liczbami wpisujemy ich największy wspólny dzielnik, po czym wcześniej napisane liczby ścieramy. Z nowo otrzymanymi n liczbami postępujemy analogicznie. Udowodnij, że po skończonej liczbie takich ruchów wszystkie liczby na okręgu będą równe.

12. Na stole leży 13 kart czerwonych i 13 czarnych. W każdym kroku podnosimy losowo dwie karty, po czym zamiast nich kładziemy na stół inne, według następujących reguł:

- zamiast dwóch czarnych kładziemy czarną i dwie czerwone,
- zamiast czarnej i czerwonej — jedną czerwoną,
- w przypadku dwóch czerwonych nie zwracamy nic.

Gra toczy się do momentu, gdy na stole pozostaną mniej niż dwie karty lub gdy liczba ruchów przekroczy 40. Wygrywamy, o ile w chwili zakończenia gry na stole leży jedna czerwona karta. Wykaż, że wygrana w tej grze jest pewna.

Część zadań pochodzi z artykułów K. Chełmińskiego i W. Pompe *Niezmienniki i półniezmienniki* w *Deltach* nr 7/1996 i 8/1996.