

Parzystość

1. Czy istnieją 4 liczby naturalne, których suma i iloczyn są liczbami nieparzystymi?
2. Czy można tak wypełnić liczbami tablicę o wymiarach
 - 4×4 ,
 - 5×5 ,by iloczyn liczb w każdej kolumnie był liczbą dodatnią, a w każdym wierszu ujemną?
3. Czy konik szachowy może przejść z jednego rogu szachownicy 8×8 do rogu przeciwległego, odwiedzając każde pole dokładnie raz?
4. Dany jest 101-kąt, posiadający oś symetrii. Udowodnij, że przechodzi ona przez jeden z jego wierzchołków.
5. Czy istnieje taki 11-kąt i taka prosta, która przecina wszystkie jego boki?
6. Na przyjęciu każdy uściśnął dłoń każdego z trzech swoich znajomych. Czy jest możliwe, że na tym przyjęciu obecnych było 7 osób?
7. Marysia i jej przyjaciele usiedli przy okrągłym stole. Okazało się, że każda z osób ma po swojej lewej stronie osobę tej samej płci, co po swojej prawej stronie. Wśród przyjaciół Marysi było siedmiu krasnoludków i pewna liczba dziewcząt. Ile?
8. Udowodnij, że liczba $1 + 2 + 3 + \dots + n$ jest podzielna przez n wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą.
9. Udowodnij, że liczba $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)$ jest kwadratem liczby naturalnej.
10. Czy w wyrażeniu $1 + 2 + 3 + \dots + 2007$ można zmienić pewną liczbę plusów na minusy tak, by otrzymana suma była równa 2007?
11. Dwóch uczonych napisało na 7 kartkach liczby od 5 do 11. Pomieszały kartki i pierwszy wziął 3 z nich, drugi 2, a ostatnie 2, nie patrząc, wyrzucił. Pierwszy uczony zajrzał do swoich 3 kartek i powiedział do drugiego: "Suma liczb na Twoich kartkach jest parzysta". Jakie liczby były na kartkach pierwszego uczonego?
12. Czy liczby naturalne od 1 do 21 podzielić na pewną liczbę grup w taki sposób, by w każdej grupie liczba największa była równa sumie pozostałych liczb?
13. (*) Liczby całkowite dodatnie chcemy podzielić na kilka zbiorów tak, by żaden zbiór nie zawierał żadnej liczby wraz z jej dwukrotnością. Czy jest to w ogóle możliwe? Jeśli tak, ile co najmniej zbiorów musimy utworzyć?
14. (*) Czy ostatnia niezerowa cyfra liczby $2007! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2007$ jest parzysta?
15. Czy liczbę 1 można przedstawić w postaci sumy ułamków $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$, gdzie a, b, c, d są nieparzystymi liczbami naturalnymi?
16. (*) Rozważmy następujące liczby: $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ itd. Które z nich są całkowite? Czy istnieje liczba tej postaci większa od 3? Większa od 2007?
17. (*) Mamy 21 liczb całkowitych ≥ 0 . Każde 20 z nich można podzielić na dwa zbiory po 10 liczb o równych sumach. Wykaż, że wszystkie te liczby są równe.

Część powyższych zadań pochodzi z książki *Miniatury Matematyczne 4* wydawnictwa *Aksjomat*.