

Parzystość II

16. Na przyjęciu każdy uściśnął dłoń każdego z trzech swoich znajomych. Czy jest możliwe, że na tym przyjęciu obecnych było 7 osób?

17. Marysia i jej przyjaciele usiedli przy okrągłym stole. Okazało się, że każda z osób ma po swojej lewej stronie osobę tej samej płci, co po swojej prawej stronie. Wśród przyjaciół Marysi było siedmiu krasnoludków i pewna liczba dziewcząt. Ile?

18. Udowodnij, że liczba $1 + 2 + 3 + \dots + n$ jest podzielna przez n wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą.

19. Udowodnij, że liczba $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)$ jest kwadratem liczby naturalnej.

20. Dane są liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pewne dwie spośród nich zwiększamy o 1. Z nowego zbioru sześciu liczb też wybieramy dwie i zwiększamy każdą z nich o jeden. Tę operację powtarzamy wielokrotnie. Czy możemy w ten sposób otrzymać sześć równych liczb?

21. Czy w wyrażeniu $1 + 2 + 3 + \dots + 2007$ można zmienić pewną liczbę plusów na minusy tak, by otrzymana suma była równa 2007?

22. Wzdłuż płotu rośnie 8 krzewów malinowych. Liczba malin na każdych dwóch sąsiednich krzewach różni się o 1. Czy w sumie na krzewach może być 225 malin?

23. Dwóch matematyków napisało na siedmiu kartkach liczby od 5 do 11. Pomieszalili kartki i pierwszy wziął trzy z nich, drugi dwie, a ostatnie dwie, nie patrząc, wyrzucili. Pierwszy matematyk zajrzał do swoich 3 kartek i powiedział do drugiego: "Suma liczb na Twoich kartkach jest parzysta". Jakie liczby były na kartkach pierwszego matematyka?

24. Czy liczby naturalne od 1 do 21 podzielić na pewną liczbę grup w taki sposób, by w każdej grupie liczba największa była równa sumie pozostałych liczb?

25. Czy liczbę 1 można przedstawić w postaci sumy ułamków $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$, gdzie a, b, c, d są nieparzystymi liczbami naturalnymi?

26. (*) Liczby całkowite dodatnie chcemy podzielić na kilka zbiorów tak, by żaden zbiór nie zawierał żadnej liczby wraz z jej dwukrotnością. Czy jest to w ogóle możliwe? Jeśli tak, ile co najmniej zbiorów musimy utworzyć?