

Parzystość I

1. Udowodnij, że następujące pary liczb są zawsze tej samej parzystości:
 - a i $|a|$,
 - $a + b$ i $a - b$,
 - $a + b$ i $a^b + b^a$ dla $a, b > 0$.
2. Udowodnij, że jeśli iloczyn dwóch liczb jest nieparzysty, to ich suma jest parzysta. Czy jest prawdziwe twierdzenie odwrotne?
3. Udowodnij, że jeśli iloczyn trzech liczb jest nieparzysty, to ich suma jest nieparzysta. Czy jest prawdziwe twierdzenie odwrotne?
4. Udowodnij, że iloczyn dwóch kolejnych liczb jest zawsze parzysty.
5. Udowodnij, że iloczyn trzech kolejnych liczb jest zawsze podzielny przez 6.
6. Czy istnieją 4 liczby naturalne, których suma i iloczyn są liczbami nieparzystymi?
7. Czy kasjer może wydać 20 zł siedmioma monetami wartości 1 zł i 5 zł?
8. Na cudownym drzewie rośnie 27 ananasów i 72 banany. Jaś zrywa z niego owoce oburącz, za jednym razem zrywając zawsze dwa. Ilekroć zrywa dwa takie same, odrasta na nowo jeden banan. Gdy zaś zrywa dwa różne, odrasta jeden ananas. Jaki owoc zostanie na drzewie jako ostatni?
9. Czy można tak wypełnić liczbami tablicę o wymiarach
 - 4×4 ,
 - 5×5 ,by iloczyn liczb w każdej kolumnie był liczbą dodatnią, a w każdym wierszu ujemną?
10. Czy można wypełnić kostkami domina o wymiarach 1×2 szachownicę o wymiarach
 - 5×5 ?
 - 8×8 ?
 - 8×8 , z której usunięto dwa przeciwległe rogi?
11. Czy konik szachowy może przejść z jednego rogu szachownicy 8×8 do rogu przeciwległego, odwiedzając każde pole dokładnie raz?
12. Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości $a, b, c \in \mathbb{N}$. Czy wszystkie trzy liczby a, b, c mogą być nieparzyste? Czy mogą wszystkie być parzyste?
13. Dany jest 101-kąt, posiadający oś symetrii. Udowodnij, że przechodzi ona przez jeden z jego wierzchołków.
14. Czy istnieje taki 11-kąt i taka prosta, która przecina wszystkie jego boki?
15. Wróbel skacze po drucie tramwajowym. Każdy skok ma długość 10 cm. Po pewnej liczbie skoków wróbel wrócił na miejsce, z którego zaczynał. Wykaż, że wróbel wykonał parzystą liczbę skoków.

Część powyższych zadań pochodzi z książki *Miniatury Matematyczne 4* wydawnictwa *Aksjomat*.