

1. Konstruujemy ciąg liczb według następującej zasady: startujemy od pewnej liczby n , mnożymy ją przez 4, odejmujemy 6, wynik znów mnożymy przez 4 itd., czyli uzyskujemy kolejno wyrazy $n, 4n, 4n - 6, 4(4n - 6), 4(4n - 6) - 6, \dots$. Czy dla $n = 7$ w tym ciągu wystąpi liczba 1001? A 1000? Czy dla $n = 1$ wystąpi liczba 16?
2. Mamy daną liczbę $2010! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2010$. Obliczamy sumę cyfr tej liczby, następnie sumę cyfr tak otrzymanej liczby i tak dalej. Uzasadnij, że postępując tak, w końcu uzyskamy liczbę jednocyfrową. Jaka to będzie liczba?
3. Smok ma 200 głów. Walczący z nim rycerz umie zadawać cztery rodzaje cięć mieczem. Przy pierwszym rodzaju rycerz ścina 33 głowy, ale 45 nowych odrasta. Przy drugim rodzaju rycerz ścina 21 głów i nic nie odrasta. Przy trzecim rodzaju ścinanych jest 17 głów, ale 14 z nich odrasta. Czwarty typ jest wyjątkowo pechowy — pozwala ścinać tylko jedną smoczą głowę, na miejscu której odrasta aż 349 nowych. Czy rycerz, umiejętnie walcząc, ma szansę ścinać wszystkie głowy smoka tak, aby żadna nie odrasta?
4. Na tablicy napisano liczby od 1 do 2007. Wybieramy dwie z nich, ścieramy i dopisujemy ich różnicę. Czy ostatnią liczbą, jaka pozostanie na tablicy, może być 27?
5. W urnie jest 1410 kul białych, 1789 kul czarnych i 2010 kul czerwonych. Poza urną znajduje się nieograniczony zapas kul każdego koloru. Wyjmujemy z urny dwie kule różnych kolorów i zastępujemy je jedną kulą trzeciego koloru. Postępujemy tak, dopóki w urnie są kule w różnych kolorach. Jaki kolor pozostanie w urnie na końcu?
6. Na pewnej wyspie żyją kameleony: 17 czerwonych, 15 zielonych i 13 żółtych. Gdy spotkają się dwa kameleony różnego koloru, oba zmieniają barwę na tę trzecią. Czy może się zdarzyć, że wszystkie kameleony będą tego samego koloru?
7. Dana jest kwadratowa szachownica o k^2 polach. Na narożnym polu tej szachownicy stoi wieża. Wykaż, że jeśli ta wieża może przejść ze swojego rogu do rogu przeciwnego, przechodząc przez każde pole szachownicy dokładnie raz, to k jest liczbą nieparzystą.
8. Wokół okrągłej polanki rośnie 10 drzew. Początkowo na każdym drzewie siedzi małpa. Co minutę pewne dwie małpy przeskakują, każda na sąsiednie drzewo. Czy w pewnym momencie wszystkie małpy mogą znaleźć się na jednym drzewie?
9. (zad. 10 z I etapu LIII OM) Dana jest szachownica 2000×2000 . Na każdym polu leży kamień. Wykonujemy następujące ruchy: jeżeli na pierwszym i trzecim z trzech kolejnych pól leżących w jednym wierszu lub kolumnie leży kamień, to możemy oba te kamienie przełożyć na drugie z tych pól (niezależnie od tego, czy jakiś kamień leży na środkowym polu i czy ruch opróżni jakiegokolwiek pole). Rozstrzygnij, czy można wykonując takie ruchy przełożyć wszystkie kamienie na jedno pole.

10. W pewnej grupie osób każdy ma co najwyżej trzech wrogów (relacja wrogości jest symetryczna). Udowodnij, że można tę grupę podzielić na dwie tak, by każdy miał w swojej podgrupie co najwyżej jednego wroga.

11. (zad. 3 z II etapu LVIII OM) Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n . Każda płytka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: wybieramy płytkę P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P . Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę. Dla każdego $n \geq 2$ rozstrzygnij, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

12. Na szachownicy $n \times n$ szerzy się epidemia. Na początku zarażonych jest k pól — ognisk epidemii. Jeżeli co najmniej dwóch z czterech sąsiadów nie zarażonego pola jest zarażonych, to ono również staje się zarażone. Znaleźć najmniejsze k takie, że zarażona może zostać cała szachownica.

13. Danych jest $2n$ punktów na płaszczyźnie (żadne trzy nie są współliniowe) — n białych i n czarnych. Udowodnij, że punkty te można tak połączyć n odcinkami, aby każdy odcinek miał końce różnych kolorów oraz by żadne dwa odcinki nie miały punktów wspólnych.

14. Każda z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ (gdzie $n \geq 2010$) jest równa 1 lub -1 . Spełniona jest równość

$$a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_5 a_6 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n a_1 + a_{n-1} a_n a_1 a_2 + a_n a_1 a_2 a_3 = 0.$$
 Udowodnij, że liczba n dzieli się przez 4.