

Niezmienniki i półniezmienniki

1. Mamy do dyspozycji baniak o pojemności 12 litrów i butelkę 3-litrową. Czy możemy odmierzyć dokładnie 8 litrów wody?
2. Mamy daną liczbę $2007! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2007$. Obliczamy sumę cyfr tej liczby, następnie sumę cyfr tak otrzymanej liczby i tak dalej. Postępujemy tak, aż otrzymamy liczbę jednocyfrową. Jaka to będzie liczba?
3. Smok ma 200 głów. Walczący z nim rycerz umie zadawać cztery rodzaje cięć mieczem. Przy pierwszym rodzaju rycerz ścina 33 głowy, ale 45 nowych odrasta. Przy drugim rodzaju rycerz ścina 21 głów i nic nie odrasta. Przy trzecim rodzaju ścinanych jest 17 głów, ale 14 z nich odrasta. Czwarty typ jest wyjątkowo pechowy — pozwala ścinać tylko jedną smoczą głowę, na miejscu której odrasta aż 349 nowych. Czy rycerz, umiejętnie walcząc, ma szansę ścinać wszystkie głowy smoka tak, aby żadna nie odrosła?
4. Na pewnej wyspie żyją kameleony: 17 czerwonych, 15 zielonych i 13 żółtych. Gdy spotkają się dwa kameleony różnego koloru, oba zmieniają barwę na tę trzecią. Czy może się zdarzyć, że wszystkie kameleony będą tego samego koloru?
5. Na tablicy napisano liczby od 1 do 2007. Wybieramy dwie z nich, ścieramy i dopisujemy ich różnicę. Czy ostatnią liczbą, jaka pozostanie na tablicy, może być 27?
6. W urnie jest 1410 kul białych, 1789 kul czarnych i 2007 kul czerwonych. Poza urną znajduje się nieograniczony zapas kul każdego koloru. Wyjmujemy z urny dwie kule różnych kolorów i zastępujemy je jedną kulą trzeciego koloru. Jaka kula pozostanie w urnie na końcu?
7. Dana jest kwadratowa szachownica o k^2 polach. Na narożnym polu tej szachownicy stoi wieża. Wykaż, że jeśli ta wieża może przejść ze swojego rogu do rogu przeciwnego, przechodząc przez każde pole szachownicy dokładnie raz, to k jest liczbą nieparzystą.
8. Wokół okrągłej polanki rośnie 10 drzew. Początkowo na każdym drzewie siedzi małpa. Co minutę pewne dwie małpy przeskakują, każda na sąsiednie drzewo. Czy w pewnym momencie wszystkie małpy mogą znaleźć się na jednym drzewie?
9. Wokół okrągłego stołu siedzi 30 gości. Kelner dał swoim kolegom, siedzącym na miejscach o numerach 1 i 3, po cukierku. Następnie chodzi wokół stołu, wybiera dowolne dwie osoby siedzące obok siebie i im obu też daje po cukierku. Czy chodząc w ten sposób wystarczająco długo, może doprowadzić do stanu, w którym wszyscy będą mieli tyle samo cukierków?

10. Mamy dwa naczynia o pojemności 3 litry każde. W jednym jest litr wody, w drugim litr 5-procentowego wodnego roztworu soli. Czy w wyniku wielokrotnego przelewania dowolnej ilości cieczy z jednego naczynia do drugiego możemy uzyskać 3-procentowy roztwór soli w naczyniu, w którym początkowo była czysta woda?

11. (zad. 10 z I etapu LIII OM) Dana jest szachownica 2000×2000 . Na każdym polu leży kamień. Wykonujemy następujące ruchy: jeżeli na pierwszym i trzecim z trzech kolejnych pól leżących w jednym wierszu lub kolumnie leży kamień, to możemy oba te kamienie przełożyć na drugie z tych pól (niezależnie od tego, czy jakiś kamień leży na środkowym polu i czy ruch opróżni jakiekolwiek pole). Rozstrzygnij, czy można wykonując takie ruchy przełożyć wszystkie kamienie na jedno pole.

12. Wróble Aleksander, Bolesław i Cezary siedzą w takiej właśnie kolejności na drucie tramwajowym. Co minutę przejeżdża tramwaj i wtedy jeden z wróbli przeskakuje przez któregoś ze swoich sąsiadów. Rozstrzygnij, czy po godzinie wróble mogą siedzieć w kolejności Cezary, Bolesław, Aleksander.

13. W klasie siedzi 33 uczniów. Co minutę dwoje z nich zamienia się miejscami. Czy jest możliwe, aby pod koniec lekcji (po 45 zamianach) każdy siedział na tym samym miejscu, co na początku?

14. Mamy daną liczbę 7^{2007} . W kolejnych krokach usuwamy pierwszą cyfrę aktualnej liczby i dodajemy ją do liczby złożonej z pozostałych cyfr. Postępujemy tak dotąd, aż dostaniemy liczbę 10-cyfrową. Udowodnij, że ta liczba ma co najmniej dwie takie same cyfry.

15. Na tarczy zegara w miejsce liczb wkręcono żarówki. Żarówka na godzinie 12 jest zapalona, pozostałe są zgaszone. Możemy wybierać dowolne pól tarczy zegara (czyli 6 kolejnych żarówek) i jednocześnie zmieniać stan wszystkich żarówek z tej połówki. Czy można w ten sposób doprowadzić do tego, by świeciła tylko żarówka na godzinie 11?

16. (zad. 3 z II etapu LVIII OM) Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n . Każda płytka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: wybieramy płytke P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P . Następnie odwracamy płytke P na drugą stronę. Dla każdego $n \geq 2$ rozstrzygnij, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

17. W pewnej grupie osób każdy ma co najwyżej trzech wrogów. Udowodnij, że można tę grupę podzielić na dwie tak, by każdy miał w swojej podgrupie co najwyżej jednego wroga.