

Kwadratowe koła i inne dziwactwa, czyli o różnych metrykach

Metryka na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ to metoda przypisywania parom punktów liczb nieujemnych, które interpretujemy jako *odległości*. Metryka musi spełniać następujące trzy warunki:

1) dla dowolnych punktów A, B ich odległość nie zależy od ich kolejności:

$$d(A, B) = d(B, A),$$

2) odległość może być zerem tylko dla równych punktów: $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$,

3) droga bezpośrednia jest najkrótsza, czyli nierówność trójkąta:

dla dowolnych punktów A, B, C zachodzi nierówność $d(A, C) + d(C, B) \geq d(A, B)$.

Posługując się pojęciem metryki, można definiować figury geometryczne, na przykład:

- odcinek: $AB \stackrel{\text{def}}{=} \{C: d(A, C) + d(C, B) = d(A, B)\}$,

- okrąg o środku A , przechodzący przez B (czyli o promieniu $r = d(A, B)$):

$$\mathcal{O}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \{C: d(A, C) = d(A, B)\}, \quad \mathcal{O}(A, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{C: d(A, C) = r\},$$

- koło o środku A i promieniu r : $\mathcal{K}(A, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{C: d(A, C) \leq r\}$,

- elipsa o ogniskach A i B oraz stałej $2a > d(A, B)$:

$$\mathcal{E}(A, B, a) \stackrel{\text{def}}{=} \{C: d(A, C) + d(B, C) = 2a\},$$

- hiperbola o ogniskach A i B oraz stałej $2a < d(A, B)$:

$$\mathcal{H}(A, B, a) \stackrel{\text{def}}{=} \{C: |d(A, C) - d(B, C)| = 2a\}.$$

Metrykę, którą posługujemy się standardowo (mierzenie „przy linijce”) nazywamy *naturalną* lub *euklidesową*. Można definiować wiele innych metryk na płaszczyźnie i badać, jak w nich wyglądają figury geometryczne.

* * *

Zadanie 5 z II etapu XLIX Olimpiady Matematycznej

Liczby nieujemne $a_1, a_2, \dots, a_7, b_1, b_2, \dots, b_7$ spełniają warunek $a_i + b_i \leq 2$ dla $i = 1, 2, \dots, 7$.

Wykazać, że dla pewnych dwóch różnych liczb $k, m \in \{1, 2, \dots, 7\}$ zachodzi nierówność

$$|a_k - a_m| + |b_k - b_m| \leq 1.$$

Literatura:

J. Lisiewicz, *Matematyka dla licealistów. Geometria*, Agencja Wyd. „Punkt”, W-wa 1993
n-kątne okręgi: A jednak może być trójkąt! Aleksander Matuszok, *Delta* nr 1 (368) 2005