

Liczby zespolone

Liczbami zespolonymi nazywamy liczby postaci

$$z = a + bi,$$

gdzie współczynniki a i b są rzeczywiste, zaś i jest **jednostką urojoną**, spełniającą warunek $i^2 = -1$.

Równość liczb zespolonych $a + bi = c + di$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ oraz $b = d$.

Dodawanie i mnożenie definiujemy „naturalnie”, pamiętając o tym, że $i^2 = -1$:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Zbiór liczb zespolonych oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$.

1. Jakie wartości mogą przyjmować potęgi liczby i ?
2. Oblicz element odwrotny do $a + bi$ oraz iloraz $\frac{a+bi}{c+di}$.
3. Udowodnij, że w zbiorze $\mathbb{C}$ nie da się wprowadzić liniowego porządku zgodnego z działaniami.
4. Dla jakich $z \in \mathbb{C}$ funkcja $f(z) = z + \frac{1}{z}$ przyjmuje wartości rzeczywiste?
5. Dla liczby $z = a + bi$ liczbę zespoloną $a - bi$ nazywamy liczbą **sprzężoną** z z i oznaczamy $\bar{z}$. Sprawdź, że

$$z + \bar{z} = 2a; \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

6. Modułem liczby zespolonej nazywamy jej odległość od zera, czyli dla $z = a + bi$ mamy

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Sprawdź, że moduł iloczynu lub ilorazu to odpowiednio iloczyn lub iloraz modułów. Sprawdź też, że zachodzi nierówność trójkąta

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

7. Sprawdź, że

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

8. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c, d istnieją takie liczby całkowite s, t , że

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (s^2 + t^2).$$

9. Znajdź nieskończenie wiele rozwiązań równania

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = z^2 + 1$$

w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z .

10. (*Zasadnicze Twierdzenie Algebry*) W $\mathbb{C}$ każdy wielomian ma pierwiastek.

11. (*Wniosek z ZTA*) W $\mathbb{C}$ każdy wielomian stopnia n ma n pierwiastków.

12. (*Wniosek z ZTA*) W $\mathbb{R}$ każdy wielomian rozkłada się na iloczyn wielomianów liniowych oraz kwadratowych nierozkładalnych.

13. (*Wniosek z ZTA*) W $\mathbb{C}$ każdy wielomian przyjmuje wszystkie wartości.

Postać trygonometryczna i wzór de Moivre'a

Zauważmy, że liczbę zespoloną można wygodnie opisać we współrzędnych biegunowych, podając jej odległość od 0 na płaszczyźnie zespolonej oraz kąt, jaki tworzy jej wektor z poziomą osią. Postać

$$z = (r, \varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

nazywamy **postacią trygonometryczną**, r to znany nam już **moduł** liczby z , zaś φ nazywamy **argumentem** (zadany z dokładnością do 2π). Kąty mierzymy antyzegarowo.

14. Oblicz $|z_2 - z_1|$, gdzie $z_1 = \frac{8}{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

15. Uzasadnij, że moduł iloczynu liczb zespolonych to iloczyn ich modułów, zaś argument iloczynu to suma argumentów.

16. (*Wzór de Moivre'a dla $\mathbb{N}$*) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

17. Opisz wzorem i podaj interpretację geometryczną wszystkich pierwiastków n -tego stopnia z 1.

18. Wyraż $\sin 5\varphi$ i $\cos 5\varphi$ przez $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$.

19. Dane są punkty $A = (3, 1)$, $B = (3, -1)$, $C = (7, -1)$, $D = (1, 1)$, $O = (0, 0)$. Oblicz $|\angle AOB| + |\angle COD|$.

20. Podaj interpretację geometryczną następujących zbiorów:

- $\{z \in \mathbb{C} : |z - c| + |z + c| \leq 2a\}; a \in \mathbb{R}, a > 0, c \in \mathbb{C}, |c| < a,$
- $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(iz) < 1\},$
- $\{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 1\}.$

21. (*2/I/LIII OM*) Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF . Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$.

22. (*Twierdzenie Napoleona dla trójkąta*) Na bokach trójkąta zbudowano, na zewnątrz, trójkąty równoboczne. Udowodnij, że ich środki tworzą trójkąt równoboczny.

23. Trójkąty równoboczne A_1B_1C , A_2B_2C oraz A_3B_3C są tak samo zorientowane. Punkt M_1 jest środkiem odcinka A_2B_3 , punkt M_2 — środkiem A_3B_1 , zaś punkt M_3 jest środkiem A_1B_2 . Udowodnij, że trójkąt $M_1M_2M_3$ jest równoboczny.

24. Dane są punkty A i B . Punkt C jest dowolnym punktem ustalonej półpłaszczyzny wyznaczonej przed prostą AB . Na bokach AC , BC trójkąta ABC budujemy, na zewnątrz, kwadraty $ACDE$ oraz $BFGC$. Udowodnij, że wszystkie tak otrzymane proste EF przechodzą przez pewien ustalony punkt, zależny tylko od położenia punktów A i B .

25. (*Twierdzenie Ptolemeusza*) Udowodnij, że dla dowolnego czworokąta $ABCD$ zachodzi nierówność $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$ oraz że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

26. Wykaż, że jeśli $n = 8k + 1$, to

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots + \binom{n}{n}$$

jest potęgą liczby 16.

27. Wykaż, że $\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0$.

28. (*V MOM*) Wykaż, że $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

29. Wyznacz wzory na sumy

$$1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha,$$

$$1 + \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha.$$

30. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n, k wielomian $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3k+2}$ jest podzielny przez wielomian $x^2 + x + 1$.