

Jednokładności

1. Udowodnij, że środki boków dowolnego czworokąta tworzą równoległobok.
2. Dane są okręgi o_1, o_2 styczne wewnętrznie w punkcie S , o_2 wewnątrz o_1 , oraz cięciwa AB okręgu o_1 styczna do o_2 w punkcie C . Wykaż, że $|\angle CSA| = |\angle CSB|$.
3. Rozłączne zewnętrznie okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach odpowiednio A i B . Prosta k , nie rozdzielająca okręgów o_1 i o_2 , jest do nich styczna w punktach odpowiednio P i Q . Wykaż, że proste AP i BQ przecinają się w punkcie należącym do okręgu o .
4. Rozłączne okręgi o_1 i o_2 o równych promieniach są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach odpowiednio A i B . Punkt P należy do okręgu o , proste PA i PB przecinają okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w drugich punktach C i D . Udowodnij, że proste AB i CD są równoległe.
5. Okrąg o przecina bok AB trójkąta ABC w punktach P_1, P_2 , bok BC w punktach R_1 i R_2 oraz bok AC w punktach S_1 i S_2 . Proste prostopadłe do AB przechodzące przez P_1 i P_2 oznaczamy odpowiednio k_1 i k_2 , prostopadłe do BC przechodzące przez R_1 i R_2 oznaczamy l_1 i l_2 , zaś prostopadłe do AC przechodzące przez S_1 i S_2 oznaczamy m_1 i m_2 . Wykaż, że jeśli proste k_1, l_1 i m_1 przecinają się w jednym punkcie, to proste k_2, l_2 i m_2 również przecinają się w jednym punkcie.
6. Dany jest trójkąt ABC oraz dodatnia liczba a . Wpisz w ten trójkąt taki prostokąt o stosunku boków a , by jego dwa sąsiednie wierzchołki należały do boku AB , a pozostałe wierzchołki należały odpowiednio do boków BC i CA .
7. Dany jest kąt wypukły α i punkt B należący do wnętrza tego kąta. W kąt α wpisz okrąg, przechodzący przez punkt B .
8. (5/III/XLII OM) Nieprzystające okręgi o_1 i o_2 leżą jeden na zewnątrz drugiego. Ich wspólne styczne przecinają prostą wyznaczoną przez ich środki w punktach A i B . Niech P będzie dowolnym punktem okręgu o_1 . Udowodnij, że istnieje średnica okręgu o_2 , której jeden koniec leży na prostej PA , a drugi — na prostej PB .
9. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AC w punkcie D , odcinek DE jest średnicą tego okręgu. Prosta BE przecina bok AC w punkcie F . Wykaż, że $AF = CD$.
10. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie P , a proste zawierające jego ramiona przecinają się w punkcie Q . Wykaż, że prosta PQ przechodzi przez środki podstaw tego trapezu.
11. (BW 98) W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AE i BC są równoległe oraz $|\angle ADE| = |\angle BDC|$. Przekątne AC i BE przecinają się w punkcie P . Udowodnij, że $|\angle EAD| = |\angle BDP|$ oraz $|\angle CBD| = |\angle ADP|$.
12. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Każda z przekątnych AD, BE, CF dzieli go na dwie części o równych polach. Wykaż, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Spora część powyższych zadań pochodzi ze zbiorów dr. Jerzego Bednarczuka (MIM UW).