

Jednokładności

1. Udowodnij, że środki boków dowolnego czworokąta tworzą równoległobok.
2. Dane są okręgi o_1, o_2 styczne wewnętrznie w punkcie S , o_2 wewnątrz o_1 , oraz cięciwa AB okręgu o_1 styczna do o_2 w punkcie C . Wykaż, że $|\angle CSA| = |\angle CSB|$.
3. Rozłączne zewnętrznie okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach odpowiednio A i B . Prosta k , nie rozdzielająca okręgów o_1 i o_2 , jest do nich styczna w punktach odpowiednio P i Q . Wykaż, że proste AP i BQ przecinają się w punkcie należącym do okręgu o .
4. Rozłączne okręgi o_1 i o_2 o równych promieniach są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach odpowiednio A i B . Punkt P należy do okręgu o , proste PA i PB przecinają okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w drugich punktach C i D . Udowodnij, że proste AB i CD są równoległe.
5. Okrąg o przecina bok AB trójkąta ABC w punktach P_1, P_2 , bok BC w punktach R_1 i R_2 oraz bok AC w punktach S_1 i S_2 . Proste prostopadłe do AB przechodzące przez P_1 i P_2 oznaczamy odpowiednio k_1 i k_2 , prostopadłe do BC przechodzące przez R_1 i R_2 oznaczamy l_1 i l_2 , zaś prostopadłe do AC przechodzące przez S_1 i S_2 oznaczamy m_1 i m_2 . Wykaż, że jeśli proste k_1, l_1 i m_1 przecinają się w jednym punkcie, to proste k_2, l_2 i m_2 również przecinają się w jednym punkcie.
6. Dany jest trójkąt ABC oraz dodatnia liczba a . Wpisz w ten trójkąt taki prostokąt o stosunku boków a , by jego dwa sąsiednie wierzchołki należały do boku AB , a pozostałe wierzchołki należały odpowiednio do boków BC i CA .
7. Dany jest kąt wypukły α i punkt B należący do wnętrza tego kąta. W kąt α wpisz okrąg, przechodzący przez punkt B .
8. (5/III/XLII OM) Nieprzystające okręgi o_1 i o_2 leżą jeden na zewnątrz drugiego. Ich wspólne styczne przecinają prostą wyznaczoną przez ich środki w punktach A i B . Niech P będzie dowolnym punktem okręgu o_1 . Udowodnij, że istnieje średnica okręgu o_2 , której jeden koniec leży na prostej PA , a drugi — na prostej PB .
9. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AC w punkcie D , odcinek DE jest średnicą tego okręgu. Prosta BE przecina bok AC w punkcie F . Wykaż, że $AF = CD$.
10. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie P , a proste zawierające jego ramiona przecinają się w punkcie Q . Wykaż, że prosta PQ przechodzi przez środki podstaw tego trapezu.
11. (BW 98) W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AE i BC są równoległe oraz $|\angle ADE| = |\angle BDC|$. Przekątne AC i BE przecinają się w punkcie P . Udowodnij, że $|\angle EAD| = |\angle BDP|$ oraz $|\angle CBD| = |\angle ADP|$.
12. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Każda z przekątnych AD, BE, CF dzieli go na dwie części o równych polach. Wykaż, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Spora część powyższych zadań pochodzi ze zbiorów dr. Jerzego Bednarczuka (MIM UW).

Jednokładności, część II

13. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach C', A', B' . Przez środki odcinków $A'B', B'C', C'A'$ prowadzimy proste prostopadłe odpowiednio do boków AB, BC, CA . Udowodnij, że proste te przecinają się w jednym punkcie.

14. (*Prosta Eulera*) W trójkącie ABC punkt S jest środkiem ciężkości, punkt H jest ortocentrum, a punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Wykaż, że punkty O, S, H leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności oraz $SH = 2 \cdot SO$.

15. Niech AB będzie pewną cięciwą okręgu o . Wyznacz zbiór środków ciężkości trójkątów wpisanych w okrąg o o podstawie AB .

16. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Udowodnij, że środki ciężkości trójkątów $ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB$ tworzą sześciokąt o przeciwległych bokach równych i równoległych.

17. Na okręgu danych jest 6 punktów. Wybieramy pewne trzy z nich i przez H oznaczamy ortocentrum wyznaczonego przez nie trójkąta, zaś przez S — środek ciężkości trójkąta wyznaczonego przez pozostałe trzy z danych sześciu punktów. Udowodnij, że wszystkie możliwe otrzymane w ten sposób proste HS przechodzą przez pewien ustalony punkt.

Składanie jednokładności

18. Okręgi O_1, O_2, O_3 są styczne odpowiednio do par boków AB i AC, AB i BC oraz AC i BC trójkąta ABC . Okrąg O jest styczny zewnętrznie do okręgów O_1, O_2 i O_3 odpowiednio w punktach D, E i F . Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

19. Okręgi O_1 i O_2 są rozłączne zewnętrznie i wpisane w kąt o wierzchołku Z . Okrąg O jest styczny zewnętrznie do okręgów O_1 i O_2 odpowiednio w punktach A i B . Udowodnij, że punkty A, B, Z są współliniowe.

20. (*10/I/XLVI OM*) Dana jest prosta k oraz leżące na niej trzy różne punkty. Każdy z nich jest początkiem pary półprostych; wszystkie te półproste leżą w jednej półpłaszczyźnie o krawędzi k . Każda z tych par półprostych wyznacza z każdą inną czworokąt. Wykaż, że jeśli w dwa z tych czworokątów można wpisać okrąg, to również w trzeci można wpisać okrąg.

21. Czworokąt $A_1A_2A_3A_4$ jest wpisany w okrąg. Punkty H_1, H_2, H_3, H_4 to ortocentra trójkątów, odpowiednio, $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$. Udowodnij, że czworokąty $A_1A_2A_3A_4$ i $H_1H_2H_3H_4$ są przystające.

22. (*9/I/L OM*) Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC . Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF . Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.