

Gry, część II

8. Filemon i Bonifacy grają w następującą grę: na polach nieskończonej szachownicy na zmianę stawiają swoje pionki. Na jednym polu może stać co najwyżej jeden pion. Gracz wygrywa, jeżeli istnieje na planszy kwadrat 2×2 , na którego każdym polu stoi jego pion. Zaczyna Filemon. Czy dla któregoś z graczy istnieje strategia wygrywająca?

9. Na szachownicy umieszczono króla szachowego w lewym dolnym rogu (na pozycji $a1$). W jednym ruchu można go przesunąć o jedno pole w prawo lub o jedno pole do góry lub o jedno pole po przekątnej „w prawo i do góry”. Gracze wykonują ruchy na przemian, wygrywa ten, kto pierwszy postawi króla na pozycji $h8$ (w przeciwnym rogu). Kto ma strategię wygrywającą i jaką?

10. Budowniczy i Malarz grają w następującą grę. Budowniczy zaczyna i w każdym swoim ruchu buduje odcinek. Następnie Malarz w swoim ruchu maluje ten odcinek na niebiesko lub czerwono. Budowniczy wygrywa, jeśli z pewnych trzech jego odcinków powstanie jednokolorowy trójkąt. Czy Malarz może tak malować odcinki, by Budowniczy nigdy nie wygrał? Kto ma strategię wygrywającą i jaką?

11. Mamy dwa pudełka, w jednym jest n kulek, zaś w drugim k . Ruch w grze polega na wyrzuceniu wszystkich kulek z dowolnie wybranego pudełka i rozdzieleniu kulek z drugiego pudełka pomiędzy obydwa tak, by żadne nie było puste. Gracze wykonują ruchy na przemian, przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu. Jakie początkowe układy (n, k) są wygrywające dla pierwszego gracza, a jakie dla drugiego?

12. Na szczyt góry prowadzi 1001 stopni. Na każdym z 500 najniższych leży kamień. Zadaniem Syzyfa jest położenie kamienia na najwyższym stopniu, a może on jedynie przenosić dowolnie wybrany kamień na pierwszy wolny stopień powyżej stopnia, na którym ten kamień leżał. Zadaniem Hadesa jest przeszkodzenie Syzyfowi w wykonaniu zadania. Za każdym razem, gdy Syzyf wniesie jeden kamień wyżej, Hades zrzuci jeden z kamieni o stopień niżej, o ile ten stopień jest wolny. Czy Syzyf może osiągnąć swój cel?

13. *Dwuruchowe szachy* polegają na tym samym, co zwykłe szachy, ale każdy z graczy wykonuje za każdym razem dwa kolejne ruchy. Udowodnij, że gracz grający białymi (rozpoczynający) ma strategię nieprzegrywającą.

14. (*Baltic Way 2003, zad. 8*) Na stole znajdują się 2003 ciastka. Dwóch graczy wykonuje ruchy jeden po drugim. Ruch polega na zjedzeniu jednego ciastka lub połowy ciastek znajdujących się na stole (części całkowitej połowy wszystkich ciastek, jeśli jest ich nieparzysta liczba); co najmniej jedno ciastko musi zostać zjedzone w każdym ruchu. Przegrywa ten, kto zje ostatnie ciastko. Dla którego gracza — pierwszego czy drugiego — istnieje strategia wygrywająca?

15. Asteriks i Obeliks grają w *obrzydliwą czekoladę*. Mają tabliczkę czekolady o wymiarach $n \times k$, której narożna kostka zawiera kawałek mydła. Na przemian odłamują od czekolady fragmenty, które następnie muszą zjeść. Łamania można dokonać tylko wzdłuż linii prostej dzielącej kostki. Ten, kto zje kostkę z mydłem, przegrywa. Dla jakich rozmiarów czekolady Asteriks, który chce wygrać, powinien chcieć zacząć grę, a dla jakich powinien uprzecznie ustąpić pierwszeństwa Obeliksowi?