

Elipsa o ogniskach w punktach F, G i o stałej $2a > FG$ to zbiór punktów P płaszczyzny takich, że $PF + PG = 2a$.

Fakt 1. Styczną w punkcie P do elipsy o ogniskach F, G jest dwusieczna k kąta zewnętrznego w trójkącie PFG . Jeśli punkt G' jest obrazem G w symetrii względem k , to punkty F, P, G' leżą na jednej prostej i $FG' = 2a$.

Fakt 2. Zbiór obrazów G' ogniska G elipsy, w symetriach względem prostych stycznych do tej elipsy, to okrąg o środku F i promieniu $2a$.

Fakt 3. Zbiór rzutów prostokątnych ogniska G elipsy na proste styczne do tej elipsy to *okrąg opisany na elipsie*.

Fakt 4. Z punktu T poprowadzono proste k, l , styczne do elipsy o ogniskach F, G odpowiednio w punktach K, L . Wykaż, że $\angle KTF = \angle LTG$ i $\angle TFK = \angle TFL$.

1. Okręgi $O_1 = \mathcal{O}(A, r_1), O_2 = \mathcal{O}(B, r_2)$ są rozłączne wewnętrznie. Znajdź zbiór środków okręgów stycznych zewnętrznie do jednego oraz wewnętrznie do drugiego.

2. Na ziemi leży podłużny, cienki robak (powyginany odcinek) o długości 1. Wykaż, że niezależnie od sposobu jego ułożenia, można go w całości przykryć:

- (a) pewnym kołem o promieniu $\frac{1}{2}$,
- (b) pewnym półkołem o promieniu $\frac{1}{2}$.

3. Udowodnij, że w dowolnym trójkącie istnieje elipsa o ogniskach O, H , wpisana w ten trójkąt, gdzie O to środek okręgu opisanego, a H to ortocentrum trójkąta.

4. (LI OM) Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym $\angle PAB = \angle PBC$. Punkt M jest środkiem boku AB . Wykaż, że $\angle APM + \angle BPC = 180^\circ$.

5. (XLVIII OM) Punkty P, Q leżą wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym $\angle ACP = \angle BCQ$ i $\angle CAP = \angle BAQ$. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB . Wykaż, że kąt DEF jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy punkt Q jest punktem przecięcia wysokości trójkąta BDF .

6. (LIV OM) Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H . Druga sfera jest styczna do ściany ABC w punkcie O oraz jest styczna do płaszczyzn zawierających pozostałe ściany tego czworościanu w punktach, które do czworościanu nie należą. Wykaż, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

Dowody faktów i rozwiązania niektórych zadań będzie można przeczytać w piśmie *Delta* w numerach 10 i 11/2010.