

Dwusieczne i nie tylko

1. Udowodnij, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2 \dots A_{12}$ przekątne A_1A_5 , A_3A_8 i A_4A_{11} przecinają się w jednym punkcie.
2. Dany jest trójkąt ABC . Punkty D i E , leżące na prostej AB , są spodkami odpowiednio dwusiecznej kąta $\angle C$ oraz dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku C . Znajdź długości obu tych dwusiecznych, oblicz pole trójkąta DCE .
3. (tw. o dwusiecznej) W trójkącie ABC dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie L . Wykaż, że $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}$.
4. (tw. o spodkach 3 dwusiecznych) W trójkącie ABC punkty D i E są spodkami dwusiecznych, odpowiednio, $\angle A$ i $\angle B$, zaś punkt F , należący do prostej AB , jest spodkiem dwusiecznej zewnętrznej $\angle C$. Wykaż, że punkty D, E, F są współliniowe.
5. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wykaż, że dwusieczne kątów ACB i ADB przecinają się w punkcie należącym do tego okręgu.
6. Czy dwusieczne dwóch kątów trójkąta mogą być prostopadłe?
7. Niech M będzie punktem przecięcia dwusiecznych kątów przy wierzchołkach A i B trójkąta ABC . Wiedząc, że $\angle ACB = \gamma$, oblicz $\angle AMB$.
8. W trójkącie ABC zachodzi równość $AB = AC = 1$ oraz $\angle B = 72^\circ$. Dwusieczna kąta BCA przecina bok AB w punkcie D . Wykaż, że $AD = BC$ i wyznacz długość tego odcinka.
9. Wewnątrz trójkąta ABC o kątach $\angle A = \angle B = 50^\circ$ obrano taki punkt M , że $\angle MAB = 30^\circ$ oraz $\angle MBA = 10^\circ$. Na półprostej AM obrano taki punkt N , że $\angle ABN = 30^\circ$.
 - (a) Wykaż, że punkt N leży na dwusiecznej kąta ACB .
 - (b) Wykaż, że trójkąty BCN i BMN są przystające.
 - (c) Znajdź miarę kąta BMC .
10. Udowodnij, że wysokości trójkąta są dwusiecznymi kątów trójkąta spodków.
11. Udowodnij, że pole żadnego trójkąta nie przekracza połowy iloczynu długości dowolnych dwóch jego boków. Dla jakich trójkątów pole jest równe połowie iloczynu długości pewnych dwóch boków?
12. Udowodnij, że pole czworokąta wypukłego nie przekracza
 - (a) $\frac{ab+cd}{2}$
 - (b) $\frac{(a+c)(b+d)}{4}$,gdzie a, b, c, d są długościami jego kolejnych boków.