Po co matematykowi bajki?

$\binom{n}{k}$ — *symbol Newtona*, liczba sposobów wybrania k-elementowego podzbioru z danego zbioru n-elementowego

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ — *silnia*, liczba sposobów ustawienia n osób w szeregu; $0! = 1$

$\sum\limits_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \quad \prod\limits_{i=0}^{n} a_i = a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$

* * *

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

2. $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}, \quad (k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$

3. $((n!)^k \cdot k!)|(kn)!$

4. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}, \quad \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$

5. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, \quad \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}, \quad \sum\limits_{k=0}^{n} k(n-k)\binom{n}{k}^2 = n^2\binom{2n-2}{n-2}$

6. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

7. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}2^k = \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 3^n$

8. $\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2} \cdot \ldots \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n} = n! \cdot \prod\limits_{i=1}^{n}(2i-1)$

9. $\binom{2n}{n} \cdot n! = 2^n \cdot \prod\limits_{i=1}^{n}(2i-1)$

10. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}k! \cdot \prod\limits_{i=1}^{n-k}(2i-1)\right) + \binom{2n}{n}n! = 3^n \cdot \prod\limits_{i=1}^{n}(2i-1)$

11. $\sum\limits_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

12. $\sum\limits_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$

13. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{k}2^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m+k}{n}$

14. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{2k}\binom{2k}{k}\binom{k}{j}2^{n-2k} = \binom{n}{j}\binom{2n-2j}{n}$

15. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}, \quad \sum\limits_{k=0}^{n} k = \binom{n+1}{2}, \quad \sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2$

16. Zauważmy, że $\binom{n+1}{2}^2$ to liczba wszystkich prostokątów na szachownicy $n \times n$ o bokach wzdłuż linii podziału kratek.
a) Zinterpretować tak samo liczbę $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3$.
b) Udowodnić kombinatorycznie, że suma pól wszystkich takich prostokątów jest równa $\binom{n+2}{3}^2$.

17. $\sum\limits_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

18. $\sum\limits_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!} = k^n$

19. Wzór dwumianowy Newtona: $(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

20. Tożsamość Vandermonde'a: $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$

21. $\binom{n}{k}\binom{n}{m} = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{m+i}\binom{m+i}{k}\binom{k}{i}$

22. $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n-k}{n} = 4^n$

23. Rozważamy wszystkie r-elementowe podzbiory zbioru $\{1,\ldots,n\}$ dla ustalonego $0 < r \leqslant n$. W każdym podzbiorze wybieramy najmniejszą liczbę. Wykazać, że średnia arytmetyczna tych liczb jest równa $\frac{n+1}{r+1}$.

Rozwiązania większości powyższych zadań opisałam w artykule *Bajki kombinatoryczne*, który ukazał się w piśmie *Matematyka Społeczeństwo Nauczanie*, nr 37 (VII 2006)