

Nierówność i twierdzenie Ptolemeusza

Twierdzenie Ptolemeusza. Dla dowolnego czworokąta $ABCD$ zachodzi nierówność $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

1. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym, a P dowolnym punktem leżącym na okręgu opisanym na nim, na tym łuku BC , który nie zawiera A . Wykaż, że $BP + CP = AP$.

2. Korzystając z twierdzenia Ptolemeusza, udowodnij twierdzenie Pitagorasa.

3. W trójkącie o bokach a, b, c długości środkowych opuszczonych odpowiednio na te boki oznaczmy przez m_a, m_b, m_c . Udowodnij, że $m_b c + m_c b \geq 2 m_a a$.

4. Punkty P, Q, R leżą odpowiednio na odcinkach AB, AC, AD w równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że jeśli na czworokącie $APQR$ można opisać okrąg, to $AR \cdot AD + AP \cdot AB = AQ \cdot AC$.

5. Udowodnij, że z odcinków o długościach równych iloczynom długości przeciwległych krawędzi dowolnego czworościanu można zbudować trójkąt.

6. (3/III/XLVIII OM) Środkowe ścian bocznych ABD, ACD, BCD ostrosłupa $ABCD$ poprowadzone z wierzchołka D tworzą równe kąty z krawędziami, do których zostały poprowadzone. Wykaż, że pole każdej ściany bocznej jest mniejsze od sumy pól dwóch pozostałych ścian bocznych.

7. (Delta 9/2004/14/486) Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $|\angle BAC| = 180^\circ - |\angle BDC|$. Udowodnij, że na krawędzi BC istnieje dokładnie jeden punkt P , dla którego zachodzi równość

$$\frac{|AP|}{|BD| \cdot |CD|} + \frac{|DP|}{|BD| \cdot |CD|} = \frac{|AB|}{|BC| \cdot |BD|} + \frac{|AC|}{|BC| \cdot |CD|}.$$

8. Czworokąt $ABCD$ jest wypukły. Udowodnij, że

$$(AB + CD)^2 + (AD + BC)^2 \geq (AC + BD)^2.$$

9. (36 MOM) Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem wypukłym takim, że $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ oraz $\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$. Niech G i H będą dwoma punktami wewnątrz tego sześciokąta. Udowodnij, że $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$.

10. (2/II/LI OM) Dwusieczna kąta BAC trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D różnym od A . Punkty K i L są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na prostą AD . Udowodnij, że $AD \geq BK + CL$.

11. Korzystając z twierdzenia Ptolemeusza, udowodnij wzory na sinus sumy i różnicy kątów:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta),$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

12. (12/X BW) W trójkącie ABC zachodzi równość $2 \cdot AB = AC + BC$. Udowodnij, że następujące cztery punkty: środek okręgu wpisanego w ten trójkąt, środek okręgu opisanego oraz środki boków AC i BC , leżą na jednym okręgu.

13. (Twierdzenie Carnota) Niech r i R będą promieniami okręgów, odpowiednio, opisanego i wpisanego w trójkąt ABC , zaś O niech będzie środkiem okręgu opisanego. Niech x, y, z będą odległościami punktu O od boków, odpowiednio, AB, AC, BC , przy czym jeśli cała najkrótsza droga od O do boku leży poza trójkątem ABC , to odpowiadającą jej odległość uznajemy za ujemną. Udowodnij, że $x + y + z = R + r$.

14. (Stare twierdzenie japońskie) Dany jest wielokąt W wpisany w okrąg. Triangulujemy ten wielokąt w dowolny sposób, wpisujemy w każdy z otrzymanych trójkątów okrąg i liczymy sumę długości promieni tych okręgów. Wykaż, że suma ta nie zależy od triangulacji.

Skróty przy numerach zadań:

- $x/y/z$ OM — zadanie nr x z etapu nr y Olimpiady Matematycznej nr z ;
- x MOM — zadanie z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej nr x ;
- Delta $x/y/z/w$ — pismo *Delta* nr x z roku y , str. z , zad. nr w ;
- $Zw\ x/y$ — zadanie z Obozu Naukowego OM w Zwardoniu, z roku x , w broszurce z obozu ma nr y ;
- x/y BW — zadanie nr x z Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich nr y .

Sporo zadań z dawnych Olimpiad, zawodów międzynarodowych oraz z obozów w Zwardoniu (często z rozwiązaniami) znaleźć można na stronie internetowej OM: www.om.edu.pl.

Literatura:

- Henryk Pawłowski, *Twierdzenie Ptolemeusza, twierdzenia Carnota i ciekawostka* — *Delta* nr 1 (248) 1995;
- broszurka z XLVI Olimpiady Matematycznej, str 95-96;
- broszurka z LI Olimpiady Matematycznej, str 112.