

## Wzór Herona i inne wzory na pole trójkąta

### Oznaczenia.

trójkąt  $ABC$ , boki  $a, b, c$  naprzeciwko odpowiednich wierzchołków  
 $h_A, h_B, h_C$  — wysokości  
 $I, I_A, I_B, I_C$  — środki okręgów wpisanego i dopisanych  
 $r, R, r_A, r_B, r_C$  — promienie okręgu wpisanego, opisanego i dopisanych  
 $D, E, F$  — punkty styczności okręgu wpisanego z bokami  $a, b, c$   
 $K, L, M$  — punkty styczności okręgu dopisanego do kąta  $A$  z prostymi  $BC, AC, AB$   
 $p = \frac{a+b+c}{2}$  — połowa obwodu  
 $S$  — pole trójkąta  $ABC$ ,  $S = \frac{1}{2}ah_A$

### Fakty pomocnicze.

1. Wyraż za pomocą  $a, b, c$  długości odcinków  $AF, AM, FM$ .
2. Udowodnij, że punkt styczności okręgu dopisanego dzieli obwód trójkąta na połowy, czyli  $AB + BK = AC + CK$ .
3. Udowodnij, że  $BK = CD$ .

### Wzory na pole trójkąta.

4. Udowodnij, że  $S = pr$  oraz że  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ .
5. Wykaż, że  $r_A = \frac{pr}{p-a}$  oraz że  $r_A = \frac{(p-b)(p-c)}{r}$ .
6. Udowodnij, że  $S = r_A(p-a) = r_B(p-b) = r_C(p-c)$  oraz że  $S = \sqrt{rr_Ar_Br_C}$ .
7. Wyprowadź **wzór Herona**  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  oraz wyznacz wzór na  $r$  zależny tylko od  $a, b, c$ .
8. Wykaż, że  $\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} = \frac{1}{r}$  i wyznacz wzory na  $h_A, h_B, h_C$  zależne tylko od  $a, b, c$ .
9. Udowodnij, że  $S = \frac{abc}{4R}$  i wyznacz wzór na  $R$  zależny tylko od  $a, b, c$ .
10. Wykaż, że średnica okręgu wpisanego nie przekracza promienia okręgu opisanego, czyli  $2r \leq R$ .
11. Udowodnij, że  $S = \frac{ar_Br_C}{r_B+r_C} = \frac{ar_Ar_C}{r_A-r}$ .
12. Wyraż  $r_Ar_B + r_Br_C + r_Cr_A$  przez  $a, b, c$  w możliwie najprostszej postaci.
13. Wyraż  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$  przez  $r, R$  w możliwie najprostszej postaci.
14. Udowodnij, że  $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ac} + \frac{IC^2}{ab} = 1$ .
15. Sprawdź, jaką postać przyjmują powyższe wzory dla trójkąta prostokątnego.
16. Wyprowadź wzory na środkową i dwusieczną trójkąta zależne tylko od  $a, b, c$ .