

Matematyczne kojarzenie małżeństw

Na przyjęciu jest n chłopców i n dziewcząt, niektórzy z nich się znają. Chcemy zeswatać n par znajomych. Aby to było możliwe, musi zachodzić

Warunek Halla (H): dla dowolnej grupy k chłopców, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, oni wspólnie znają co najmniej k dziewcząt.

Twierdzenie Halla o kojarzeniu małżeństw (Philip Hall, 1935):

Warunek (H) jest nie tylko konieczny, ale też dostateczny.

* * *

1. Pewien obszar leśny podzielono na 100 działek rekreacyjnych o tej samej powierzchni. Jednocześnie strażacy podzielili ten obszar inaczej na 100 sektorów o tej samej powierzchni. Chcemy wykopać studnie tak, by na każdej działce i w każdym sektorze była jedna z nich (studnia jest punktem i nie może znajdować się na żadnej linii podziału). Oczywiście musimy w tym celu wykopać co najmniej 100 studni. Czy można rozmieścić je tak, by 100 wystarczyło?

2. Układamy pasjans. Talię 52 kart rozkładamy w 13 kupkach po 4 karty. Następnie staramy się tak wybrać po jednej karcie z każdej kupki, by w rezultacie mieć w ręku *zestaw*, czyli po jednej karcie każdej wysokości (2, 3, ..., 10, W, D, K, A, kolory są nieistotne). Czy dla dowolnego układu kart jesteśmy w stanie taki zestaw wybrać? Czy zawsze można z pozostałych na stole kart wybrać kolejny taki zestaw, potem trzeci i w rezultacie mieć po jednej karcie w każdej kupce, stanowiące czwarty zestaw?

3. *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, \dots, n\}$.

Prostokątem łacińskim nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, \dots, n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

Czy każdy prostokąt łaciński można uzupełnić do kwadratu łacińskiego?

4. *Kwadratem magicznym* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{0, 1, \dots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie oraz w każdym wierszu suma liczb jest taka sama (oznaczymy ją S).

Gra w kamyki jest jednoosobowa. Planszę stanowi dowolny kwadrat magiczny $n \times n$. Na każdym polu z dodatnią liczbą kładziemy odpowiadającą tej wartości liczbę kamyków (na całej planszy mamy więc $S \cdot n$ kamyków, niektóre pola mogą być puste). Ruch polega na zdjęciu z planszy garści n kamyków, z których każdy podnieśliśmy z innego wiersza i jednocześnie każdy z innej kolumny. Chcemy wykonać S ruchów, zdejmując w rezultacie wszystkie kamyki. Czy zawsze jest to możliwe? Czy zawsze możliwe jest wykonanie choćby jednego ruchu (pustych pól może być dużo!)?

5. Załóżmy, że każdy z n chłopców zna dokładnie t spośród n dziewcząt ($t \leq n$) i każda z dziewcząt zna dokładnie t chłopców. Czy można urządzić dyskotekę, w czasie której odbędzie się t tańców i każdy zatańczy dokładnie raz z każdą znajomą osobą przeciwnej płci?

6. Dwóch magików pokazuje sztuczkę. Jeden z nich podaje komuś z publiczności talię 124 różnych kart i prosi o wybranie dowolnych pięciu. Następnie pokazuje drugiemu magikowi kolejno pewne cztery spośród tych kart, a on na tej podstawie określa piątą kartę. Jak to możliwe?

7. Wskazać konkretny, prosty algorytm pokazywania tej samej sztuczki dla talii 52 kart.

Literatura:

Dowód twierdzenia oraz rozwiązania powyższych zadań opisałam w artykule *Twierdzenie Halla o kojarzeniu małżeństw*, w piśmie *Matematyka Społeczeństwo Nauczanie*, nr 36 (I 2006)

Dowody z Księgi; M. Aigner, G.M. Ziegler; Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002; rozdział 25: *Uzupełnianie kwadratów łacińskich*

The Best Card Trick; M. Kleber; *Mathematical Intelligencer* 24, nr 1 (zima 2002); tekst dostępny również na stronie internetowej autora:
<http://people.brandeis.edu/~kleber/Papers/card.pdf>