

Zasada szufladkowa Dirichleta

część I — zadania niegeometryczne

1. W szufladzie mamy wymieszane skarpetki: 10 niebieskich, 10 czerwonych i 10 czarnych. Wyciągamy je, nie patrząc. Ile skarpetek trzeba wyciągnąć, aby w rezultacie na pewno mieć:
 - a) dwie w tym samym kolorze?
 - b) dwie różne?
 - c) po jednej każdego koloru?
2. Wykaż, że w Warszawie mieszkają dwie osoby mające tę samą liczbę włosów na głowie.
3. Wykaż, że w dowolnej grupie osób zawsze są takie dwie, które mają tyle samo znajomych (jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A).
4. Przy okrągłym stole jest 100 miejsc oznaczonych proporczykami 100 różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy stole w sposób losowy, ale tak, że żaden z nich nie usiadł na odpowiednim miejscu. Udowodnij, że można tak obrócić okrągły stół, aby co najmniej dwóch ambasadorów siedziało przy właściwych proporczykach.
5. W sali znajduje się 47 osób. Wykaż, że wśród nich znajdzie się 7 osób urodzonych tego samego dnia tygodnia.
6. Udowodnij, że wśród dowolnie wybranych 11 liczb naturalnych zawsze znajdują się dwie z tą samą ostatnią cyfrą.
7. Danych jest 12 różnych dwucyfrowych liczb naturalnych. Pokaż, że można wybrać pewne dwie z nich tak, aby ich różnica była postaci $\overline{aa}$ (gdzie a jest cyfrą).
8. Rozwinięcie dziesiętne pewnej liczby wymiernej jest nieskończone. Wykaż, że jest ono okresowe.
9. Spośród liczb $1, 2, \dots, 9$ wybrano sześć. Udowodnij, że spośród wybranych liczb można wybrać dwie, których suma jest równa 10.
10. Udowodnij, że dla dowolnych 65 podzbiorów zbioru 7-elementowego zawsze znajdują się dwa zbiory rozłączne.

- 11.** Ze zbioru liczb $\{1, 2, \dots, 2000\}$ wybrano podzbiór 1001-elementowy. Wykaż, że w podzbiorze tym istnieją dwie liczby względnie pierwsze.
- 12.** Ze zbioru liczb $\{1, 2, \dots, 2000\}$ wybrano podzbiór 1001-elementowy. Wykaż, że w podzbiorze tym istnieją dwie różne liczby, z których jedna dzieli drugą.
- 13.** Udowodnij, że w dowolnym ciągu n -wyrazowym złożonym z liczb całkowitych istnieje pewna liczba jego kolejnych wyrazów, których suma jest podzielna przez n .
- 14.** Na okręgu umieszczonych jest 101 liczb całkowitych dodatnich o sumie równej 300. Udowodnij, że można wybrać pewną liczbę kolejnych spośród nich o sumie równej 200.
- 15.** Liczby $a_1, \dots, a_5$ są całkowite, liczby $b_1, \dots, b_5$ to pewna ich permutacja. Udowodnij, że liczba $(a_1 - b_1) \dots (a_5 - b_5)$ jest parzysta.
- 16.** Mamy dany pewien zbiór 2006 liczb naturalnych. Pokaż, że można wybrać takie trzy liczby a, b, c z tego zbioru, aby liczba $a(b - c)$ była podzielna przez 2006.
- 17.** Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej istnieje taka jej wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.
- 18.** 37 żołnierzy stoi w szeregu. Wykaż, że można wybrać pewnych 7 spośród nich tak, aby, gdy oni wystąpią krok naprzód, byli ustawieni według wzrostu (rosnąco lub malejąco).