

Zasada szufladkowa Dirichleta

część I — zadania niegeometryczne

1. Wykaż, że w Warszawie mieszkają dwie osoby mające tę samą liczbę włosów na głowie.
2. W sali znajduje się 47 osób. Wykaż, że wśród nich znajdzie się 7 osób urodzonych tego samego dnia tygodnia.
3. Udowodnij, że wśród dowolnie wybranych 11 liczb naturalnych zawsze znajdują się dwie z tą samą ostatnią cyfrą.
4. Danych jest 12 różnych dwucyfrowych liczb naturalnych. Pokaż, że można wybrać pewne dwie z nich tak, aby ich różnica była postaci $\overline{aa}$ (gdzie a jest cyfrą).
5. Spośród liczb $1, 2, \dots, 9$ wybrano sześć. Udowodnij, że spośród wybranych liczb można wybrać dwie, których suma jest równa 10.
6. Spośród liczb $1, 2, \dots, 2000$ wybrano ponad połowę. Wykaż, że wśród wybranych liczb znajdują się dwie kolejne.
7. Przy okrągłym stole jest 100 miejsc oznaczonych proporczykami 100 różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy stole w sposób losowy, ale tak, że żaden z nich nie usiadł na odpowiednim miejscu. Udowodnij, że można tak obrócić okrągły stół, aby co najmniej dwóch ambasadorów siedziało przy właściwych proporczykach.
8. Wykaż, że w dowolnej grupie osób zawsze są takie dwie, które mają tyle samo znajomych (jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A).

część II — zadania geometryczne

9. Udowodnij, że w dowolnym wielościanie
 - a) pewne dwa wierzchołki
 - b) pewne dwie ścianymają tyle samo krawędzi.
10. Na płaszczyźnie danych jest 6 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. W każdym trójkącie wyznaczonym przez pewną trójkę tych punktów najkrótszy bok malujemy na czerwono. Udowodnij, że istnieje trójkąt o wszystkich bokach czerwonych.
11. W pewnym kraju jest 66 miast, z których każde dwa połączone są jednym z czterech środków komunikacji: koleją, autobusami, linią lotniczą lub żeglugą śród-

ładową. Udowodnij, że pomiędzy pewnymi trzema miastami można odbyć podróż „po trójkącie” korzystając tylko z jednego środka komunikacji.

12. Na nieskończonej szachownicy ustawionych jest 1999 skoczków szachowych. Udowodnij, że można spośród nich wybrać 1000 takich, że żadne dwa z nich się nie atakują.

13. W kole o promieniu 1 wybrano 7 punktów. Wykaż, że istnieje wśród nich co najmniej jedna para punktów, których odległość nie przekracza 1.

14. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 2 wybrano 5 punktów. Udowodnij, że pewne 2 spośród nich są odległe o co najwyżej 1.

część IIIa — trudniejsze zadania geometryczne

15. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 12 wybrano 300 punktów, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że istnieją wśród nich trzy, tworzące trójkąt o obwodzie nie większym niż 3.

16. W kwadracie o boku 1 wybrano 101 punktów (być może leżących na brzegu) w taki sposób, że żadne 3 z nich nie leżą na jednej prostej. Wykaż, że pewne trzy z tych punktów tworzą trójkąt o polu nie większym niż 0,01.

17. Mamy nieograniczoną pokratkowaną kartkę papieru i figurę P o polu mniejszym od pola pojedynczej kratki. Pokaż, że figurę tę można tak położyć na papierze, aby nie przykrywała ona żadnego węzła kraty.

18. Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitych). Udowodnij, że środek jednego z odcinków łączących te punkty też jest punktem kratowym.

19. Ponad połowę powierzchni pewnej sfery pomalowano na niebiesko. Wykaż, że istnieje taka średnica tej sfery, której obydwa końce są niebieskie.

20. Każdy wierzchołek jedenastokąta foremnego pomalowano na jeden z czterech kolorów. Udowodnij, że można wybrać pięć kolejnych wierzchołków, pomalowanych co najwyżej trzema kolorami.

część IIIb — trudniejsze zadania niegeometryczne

21. Wykaż, że wśród dowolnie wypisanych 7 liczb całkowitych zawsze można wskazać pewną liczbę kolejnych, których suma jest podzielna przez 7.

22. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej istnieje taka jej wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.