1 Homotopie 3: Przekształcenia $S^1 \to S^1$

Grupa 2: Piątek 26.I, Grupa 4: Czwartek 18.I

Zadanie 1. Rozważmy torus $S^1 \times S^1$. Niech $\pi_1, \pi_2 : S^1 \times S^1 \to S^1$ będą rzutowaniami na współrzędne.

a) Wykaż, że rzutowania π_1 i π_2 nie są homotopijne.

b) Wykaż, że torus nie jest ściągalny.

Hint: rozważyć dobrze wybrane włożenie $S^1 \to S^1 \times S^1$.

Zadanie 2. Niech X będzie dowolną przestrzenią, a $Y \subset X$ podprzestrzenią nieściągalną. Załóżmy, że istnieje ciągłe przekształcenie $\pi : X \to Y$ takie, że

$$\forall_{y \in Y} \pi(y) = y\,.$$

Wykaż, że X nie jest ściągalna.

Zadanie 3 (E22/23)**.** Niech X będzie dowolną przestrzenią. Zdefiniujmy

$$\Sigma X := X \times [0,1]/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\})\,.$$

a) Uzasadnij, że przestrzeń ΣX jest nieściągalna.

b) Uzasadnij, że przestrzeń ΣX jest łukowo spójna.

Zadanie 4 (E13/14)**.** Uzasadnij, że nakłuty torus $S^1 \times S^1 - \{1\} \times \{1\}$ jest nieściągalny.

Zadanie 5 (E13/14)**.** Rozważmy przekształcenia $f_1, f_2 : S^1 \to \mathbb{C} - \{-2, 2\}$ dane wzorami

$$f_1(z) = z - 2\,, \qquad f_2(z) = z + 2$$

Uzasadnij, że f_1 i f_2 nie homotopijne.

Zadanie 6 (E13/14)**.** Rozważmy przekształcenia $f_1, f_2 : S^1 \to (\mathbb{C}\setminus\{0\}) \times \mathbb{R}$ dane wzorami

$$f_1(z) = (z^2, \mathrm{Re(z)})\,, \qquad f_2(z) = (z, \mathrm{Im(z)})$$

Uzasadnij, że f_1 i f_2 nie homotopijne.

2 Homotopie 2: przestrzeni ściągalne

Grupa 2: Środa 24.I, Grupa 4: Środa 17.I

Zadanie 1. Uzasadnij, że przestrzeń $(\mathbb{R}^n, d_{eu})$ jest ściągalna.

Zadanie 2 (6.4)**.** Niech

$$X = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{1/n\}\times[0,1]\right)\cup\{0\}\times[0,1]\cup[0,1]\times\{1\}\,.$$

Uzasadnij, że X jest przestrzenią ściągalną.

Zadanie 3 (6.5)**.** Niech $I(a;b)$ oznacza odcinek domknięty na płaszczyźnie łączący punkty a i b. Niech

$$X = I((0,0);(0,1))\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I((\frac{1}{n},0);(0,1))\,.$$

a) Uzasadnij, że X jest ściągalna.

b) Uzasadnij, że nie istnieje homotopia $H : X\times I \to X$ między id_X a przekształceniem stałym $f(x) = (0,0)$ taka, że dla dla każdego $t\in[0,1]$ zachodzi $H((0,0),t) = (0,0)$.

Zadanie 4 (6.3)**.** Niech X będzie przestrzenią ściągalną, a Y dowolną przestrzenią. Uzasadnij, że

a) dowolne przekształcenie $f : X \to Y$ jest homotopijne z przekształceniem stałym.

b) dowolne przekształcenie $f : Y \to X$ jest homotopijne z przekształceniem stałym.

Zadanie 5 (E14/15)**.** Rozważmy przestrzeń funkcji ciągłych z metryką supremum $(C[0,1], d_{sup})$. Sprawdzić czy poniższe podprzestrzenie są łukowo spójne. Sprawdzić, czy są ściągalne.

$$A = \{f\in C[0,1]|f(0)\le f(1)\}\,,\qquad B = \{f\in C[0,1]|f(0)\ne f(1)\}\,.$$

Zadanie 6 (6.8)**.** Niech

$$E = \{x\in\mathbb{R}^2|1 < d_{eu}(x,0) < 3\}\,,\qquad \partial E = \{x\in\mathbb{R}^2|d_{eu}(x,0) = 1\vee d_{eu}(x,0) = 3\}\,.$$

Niech Y będzie przestrzenią ściągalną. Uzasadnij, że każde przekształcenie ciągłe $f : \partial E \to Y$ można przedłużyć do ciągłego $\tilde{f} : E \to Y$.

Zadanie 7 (6.7)**.** Niech

$$D = \{x\in\mathbb{R}^2|d_{eu}(x,0)\le 2\}\,.$$

Niech Y będzie przestrzenią ściągalną. Uzasadnij, że każde przekształcenie ciągłe $f : S^1 \to Y$ można przedłużyć do ciągłego $\tilde{f} : D \to Y$.

3 Homotopie 1: przykłady

Grupa 2: Piątek 19.I, Grupa 4: Czwartek 11.I

Zadanie 1. a) Rozważmy, przestrzeń $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$. Znajdź homotopię między przekształceniami $f_1, f_2 : \{a\} \to X$:

$$f_1(a) = (1, 1)\,, \qquad f_2(a) = (-1, 1)\,.$$

b) Uzasadnij, że przestrzeń topologiczna X jest łukowo spójna wtedy i tylko wtedy gdy dowolne dwa przekształcenia z punktu w X są homotopijne.

Zadanie 2. a) Znaleźć homotopię między przekształceniami $f_1, f_2 : S^1 \to \mathbb{R}^2$:

$$f_1((x, y)) = (x - 2, y)\,, \qquad f_2((x, y)) = (1, 0)\,.$$

b) Uzasadnić, że dowolne dwa przekształcenia $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}^2$ są homotopijne.

Zadanie 3. Uzasadnij, że przekształcenia $f_1, f_2 : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$:

$$f_1((x, y)) = (x - 2, y)\,, \qquad f_2((x, y)) = (1, 0)\,,$$

są homotopijne.

Zadanie 4 (6.1,6.2)**.** Uzasadnić, że przekształcenia f i g są homotopijne.

a) $f, g : S^1 \to S^1$, $f(z) = z$, $g(z) = iz$.

b) $f, g : S^2 \to S^2$, $f(x) = (-1, 0, 0)$, $\forall_{x \in S^2} g(x) \neq (1, 0, 0)$.

c) $f, g : X \to S^n$, $\forall_{x \in X} d_{eu}(f(x), g(x)) < 2$

Zadanie 5. Niech $f_1, f_2 : X \to Y$ będą funkcjami ciągłymi. Załóżmy, że f_1 i f_2 są homotopijne

a) Niech $h : Y \to Z$ będzie ciągłe. Uzasadnij, że $h \circ f_1$ i $h \circ f_2$ są homotopijne.

b) Niech $g : Z \to X$ będzie ciągłe. Uzasadnij, że $f_1 \circ g$ i $f_2 \circ g$ są homotopijne.

Zadanie 6. Niech $f : [0, 1] \to X$ będzie funkcją ciągłą. Niech $g : [0, 1] \to X$ będzie dane przez $g(t) = f(0)$. Znajdź homotopię między f i g.

4 Zupełność 2

Grupa 2: Piątek 12.I, Grupa 4: Czwartek 21.XII

Praca domowa 1. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem przeliczalnym w $(\mathbb{R}^n, d_{eu})$. Dla $k \in \mathbb{N}$ niech $F_k \subset \mathbb{R}$ będą zbiorami domkniętymi brzegowymi. Pokaż, że istnieje punkt $c \in \mathbb{R}^n$ taki, że dla każdego $a \in A$ zachodzi

$$d_{eu}(c, a) \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \,.$$

Zadanie 1 (E22/23)**.** Niech $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1/n\} \times [-1/n, 1/n]$. Niech d_k będzie metryką kolejową, a d_r metryką rzeki.

a) Czy (X, d_k) jest zupełna? Czy jest metryzowalna w sposób zupełny?

b) Czy (X, d_r) jest zupełna? Czy jest metryzowalna w sposób zupełny?

Zadanie 2 (E19/20)**.** Dla $a \in \mathbb{R}$ zdefiniujmy $X(a) = \{f \in C[0,1] | f(0) = a\}$.

a) Uzasadnij, że $X(a) \subset (C[0,1], d_{sup})$ jest domknięty i brzegowy.

b) Niech $X = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} X(q)$. Uzasadnij, że (X, d_{sup}) nie jest metryzowalna w sposób zupełny.

Zadanie 3 (E20/21)**.** Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną, a T dowolnym zbiorem. Niech

$$\{f_t : X \to \mathbb{R} | t \in T\}$$

będzie rodziną funkcji ciągłych ograniczonych punktowo, czyli:

$$\forall_{x \in X} \exists_{k \in \mathbb{N}} \forall_{t \in T} f_t(x) \in [-k, k] \,.$$

Uzasadnij, że istnieje niepusty zbiór otwarty $U \subset X$ i liczba naturalna m takie, że

$$\forall_{x \in U} \forall_{t \in T} f_t(x) \in [-m, m] \,.$$

Zadanie 4 (K*12/13)**.** Krzywą algebraiczną nazywamy podzbiór

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sum_{k,l=0}^{n} c_{kl} \cdot x^k y^l = 0\}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ i współczynniki $c_{kl} \in \mathbb{R}$ nie są wszystkie równe zero. Uzasadnij, że płaszczyzny nie da się pokryć przeliczalnie wieloma krzywymi algebraicznymi.

Zadanie 5. Rozważmy przekształcenie $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane przez $T(x) = ln(1 + e^x)$. Uzasadnić, że T nie ma punktu stałego, ale $|T(x) - T(y)| < |x - y|$.

Zadanie 6. Niech X będzie przestrzenią zupełną, a $T : X \to X$ przekształceniem rozszerzającym, czyli istnieje $c > 0$ takie, że

$$|T(x) - T(y)| \geq c \cdot |x - y|$$

Załóżmy, że T jest na. Uzasadnić, że T ma dokładnie jeden punkt stały.

5 Zupełność 1

Grupa 2: Środa 10.I, Grupa 4: Środa 20.XII

Zadanie 1. Niech d_k będzie topologią kolejową. Uzasadnij, że $(\mathbb{R}^2, d_k)$ jest zupełna.

Zadanie 2. Rozważmy zbiór $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Uzasadnić, że $(\mathbb{R}_+, d_{eu})$ nie jest zupełna ale jest metryzowalna w sposób zupełny.

Zadanie 3 (3.8)**.** Uzasadnić, że liczby niewymierne nie są sumą przeliczalnie wielu zbiorów domkniętych w $\mathbb{R}$.

Zadanie 4 (3.6)**.** Niech (X, d) będzie przestrzenią zupełną. Uzasadnić, że jeśli X jest przeliczalna to posiada punkt izolowany.

Zadanie 5 (3.10)**.** Które z poniższych zbiorów są metryzowalne w sposób zupełny:

$$\mathbb{Q}\,, \qquad \mathbb{Q} \times \mathbb{R}\,, \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1/n\} \times [0,1]\,,$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < \sqrt{x^2+y^2} < 1\}\,, \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{Q}\}\,.$$

Zadanie 6 (3.11)**.** Niech (X, d) będzie przestrzenią zupełną, $U \subset X$ zbiorem otwartym, a $F = X - U$ jego dopełnieniem.

a) Uzasadnij, że
$$\tilde{d}(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)} \right|$$
jest metryką na U.

b) Wybierzmy $x \in U$. Uzasadnij, że $B_{\tilde{d}}(x, \varepsilon) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$. Uzasadnij, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że $B_d(x, \delta) \subseteq B_{\tilde{d}}(x, \varepsilon)$. Wywnioskuj, że d i $\tilde{d}$ generują tą samą topologię.

c) Uzasadnij, że ciąg Couchy'ego $\{x_n\}_{n \in N}$ w $(U, \tilde{d})$ jest również ciągiem Cauchy'ego w (X, d). Uzasadnij, że jego granica należy do U.

d) Wywnioskuj, że U jest metryzowalna w sposób zupełny.

Zadanie 7. Powtórz poprzednie zadanie używając 3.11.

Zadanie 8 (3.14)**.** Niech $S^1 = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$ będzie okręgiem jednostkowym.

- Uzasadnić, że istnieje punkt (a, b) taki, że dla każdej pary liczb wymiernych $q, c \in \mathbb{Q}$ zachodzi $b \neq aq + c$
- Niech F będzie zbiorem domkniętym i brzegowym na prostej. Uzasadnić, że istnieje punkt (a, b) taki, że dla każdej pary $q \in \mathbb{Q}\,, c \in F$ zachodzi $b \neq aq + c$

6 Spójność 3

Praca domowa 1. Rozważmy przestrzeń

$$X = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1/n\} \times [0,1] \right) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \{(0,1)\} \cup \{(0,1/2)\}\,.$$

Czy ta przestrzeń jest spójna? Czy jest łukowo spójna?

Zadanie 1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, Y zbiorem a $f : X \to Y$ funkcją. Mówimy, że f jest lokalnie stała gdy dla każdego punktu $x \in X$ funkcja f jest stała na pewnym otoczeniu punktu x. Załóżmy, że X jest przestrzenią spójną. Uzasadnij, że dowolna funkcja lokalnie stała jest stała.

Zadanie 2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Mówimy, że X jest lokalnie łukowo spójna gdy każdy punktu $x \in X$ posiada łukowo spójne otoczenie. Załóżmy, że X jest przestrzenią spójną i lokalnie łukowo spójną. Uzasadnij, że X jest łukowo spójna.

Zadanie 3 (5.10)**.** Niech $a = \{(0,0)\}, b = \{(1,0)\}$ i niech

$$X = \{a, b\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [0,1] \times \{1/n\}\,.$$

Niech $\sim$ będzie relacją należenia do tej samej składowej spójności. Pokazać, że przestrzeń ilorazowa $X/\sim$ nie jest T_2.

Zadanie 4 (E21)**.** Niech X będzie przestrzenią spójna. Udowodnij, ze jeśli $X = F \cup H$, gdzie F i H sa domknięte oraz przecięcie $F \cap H$ jest spójne, to zbiory F i H sa spójne. Czy założenie domkniętości zbiorów F i H jest istotne?

Zadanie 5. Stwierdzić które z liter $X, U, T, H, J, K, Z, O, P$ są ze sobą homeomorficzne.

7 Spójność 2, składowe spójności

Zadanie 1 (Powtórzenie z wykładu)**.** Niech $f : X \to Y$ będzie ciągłą funkcją na. Załóżmy, że X jest spójny. Pokazać, że Y jest spójny.

Zadanie 2 (Powtórzenie z wykładu)**.** Udowodnić, że produkt dwóch przestrzeni spójnych jest spójny.

Zadanie 3. Niech X będzie spójną przestrzenią topologiczną, a $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ funkcjami ciągłymi. Niech

$$S_x = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 | (s - f(x))^2 + (t - g(x))^2 = h(x)^2\} .$$

Pokazać, że zbiór $S = \bigcup_{x \in X} S_x$ jest spójny.

Zadanie 4. Niech $a = \{(0,0)\}, b = \{(1,0)\}$ i niech

$$X = \{a, b\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [0,1] \times \{1/n\}$$

będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej. Wyznacz składowe spójne przestrzeni X. Pokaz, ze X nie jest homeomorficzna z $X \setminus \{a\}$.

Zadanie 5. Wykazać, ze w spójnej przestrzeni metryzowalnej, mającej co najmniej dwa punkty, każda kula jest nieprzeliczalna.

Zadanie 6. Wyznacz składowe spójne $\mathbb{Q}$ z topologią euklidesową. Wyznacz składowe spójne $\mathbb{R}$ z topologią strzałki. Zauważ, że nie są to zbiory otwarte.

Zadanie 7. Uzasadnić, że składowe spójności są domknięte.

8 Spójność 1

Teoria: Spójność, łukowa spójność 4.1, 4.2

Zadanie 1. Pokaż, że $\mathbb{R}^2$ z topologią metryki kolejowej i metryki rzeka są spójne. Pokaż, że $\mathbb{R}$ z topologią strzałki jest niespójna.

Zadanie 2. Rozważmy funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że $\forall_{x\in\mathbb{R}} f(x) \geq g(x)$. Niech

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \geq y \geq g(x)\}.$$

Wykazać, że jeśli f jest funkcją ciągłą, to zbiór S jest spójny.

Zadanie 3. Niech A będzie spójnym podzbiorem przestrzeni topologicznej X, i niech $B \subset X$ będzie podzbiorem takim, ze $A \subset B \subset \overline{A}$. Pokaż, że B jest spójny.

Zadanie 4. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wykazać, że jeśli wykres

$$W(f) := \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

jest spójnym podzbiorem płaszczyzny, to f ma własność Darboux.

Zadanie 5. Pokaz, ze zbiór

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\{1/n\}\times[0,1]\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\{-1/n\}\times[-1,0]\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\{[-1,0]\times\{1/n\}\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\{[1,1]\times\{-1/n\}\}$$

jest spójny, ale nie łukowo spójny.

Zadanie 6 (K22)**.** Dla $q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ niech $I_q = \{(q, t) \in \mathbb{R}^2 | t \in [-q, q]\}$. Rozważmy przestrzeń

$$X = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap(0,1)} I_q \cup ([0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{1\}).$$

a) Udowodnić, że X jest spójna.

b) Udowodnić, że X nie jest łukowo spójna.

Zadanie 7. Niech $A \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem przeliczalnym. Uzasadnić, że przestrzeń $\mathbb{R}^2 - A$ jest łukowo spójna.

9 Zwartość 3, zbiór Cantora

Praca domowa 1 (2.15)**.** Niech $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych $f_n : X \to [0,\infty)$ na przestrzeni zwartej X. Załóżmy, że ciąg jest nierosnący czyli:

$$\forall_{x\in X} f_1(x) \geq f_2(x) \geq ... \geq 0\,.$$

Ponadto załóżmy, że jest punktowo zbieżny do zera czyli

$$\forall_{x\in X,\varepsilon>0}\exists_{N_x\in\mathbb{N}}\forall_{k>N_x} f_k(x) < \varepsilon\,.$$

Udowodnić, że ciąg zbiega jednostajnie do zera czyli

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{x\in X,k>N} f_k(x) < \varepsilon\,.$$

Hint: Dla ustalonego ε zbiory $U_k = f_k^{-1}([0,\varepsilon))$ stanowią pokrycie otwarte X.
Uwaga: Zadanie jest prawdziwe na dowolnej zwartej przestrzeni $(X,\mathcal{T})$. Jeśli wolicie używać metrycznej definicji zwartości zamiast pokryciowej to wolno dodatkowo założyć, że przestrzeń $(X,\mathcal{T})$ jest metryzowalna.

Zadanie 1. Niech $A, B \subset X$ będą zwartymi podzbiorami przestrzeni topologicznej X spełniającej warunek Hausdorffa. Uzasadnić, że $A\cup B$ i $A\cap B$ są zwarte

Zadanie 2. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Odległość między rozłącznymi podzbiorami $A, B \subset X$ określamy formułą

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{d(a,b) : a\in A, b\in B\}\,.$$

a) Załóżmy, że A jest domknięty, B zwarty i rozłączny z A. Wykazać, że $\mathrm{dist}(A,B) > 0$.

b) Znaleźć rozłączne i domknięte podzbiory $A, B \subset \mathbb{R}^2$ takie, że $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.

c) Niech U będzie podzbiorem otwartym płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ takim, że

$$[-1,1]\times[-1,1] \subset U\,.$$

Udowodnić, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że

$$[-1-\varepsilon,1]\times[-1,1] \subset U\,.$$

Zadanie 3. Niech $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Dla zbioru $A\subset\mathbb{R}$ rozważmy zbiór

$$Y(A) = \bigcup_{a\in A} I((1,f(a));(0,g(a))) \subset \mathbb{R}^2\,.$$

Gdzie I oznacza odcinek domknięty o zadanych końcach. Załóżmy, że A jest zwarty. Pokaż, że $Y(A)$ jest zwarty.

Teoria: Zbiór Cantora 2.3

Zadanie 4. Rozważmy przestrzenie metryczne $(X, d_X), (Y, d_Y)$ i funkcję $f : X \to Y$. Mówimy, że f jest Lipschitzowska gdy istnieje stała $L \in \mathbb{R}$ taka, że

$$\forall_{a,b \in X} d_Y(f(a), f(b)) \leq L \cdot d_X(a, b)\,.$$

Uzasadnij, że funkcja Lipschitzowska jest ciągła.

Zadanie 5. Niech C będzie zbiorem Cantora. Uzasadnić, że produkt $C \times C$ jest homeomorficzny z C.

Zadanie 6. Niech C będzie zbiorem Cantora. Skonstruować ciągłe przekształcenie z C na odcinek $[0, 1]$.

10 Zwartość 2

Zadanie 1. Niech X będzie przestrzenią zwartą. Rozważmy domknięte podzbiory $A, B \subset X$ i punkt $x \in X$.

1. (T3) Załóżmy, że $x \notin A$, pokazać że istnieją otwarte zbiory U_1, U_2 takie, że
$$U_1 \cap U_2 = \varnothing\,, \qquad A \subset U_1\,, \qquad x \in U_2\,.$$
2. (T4) Załóżmy, że $A \cap B = \varnothing$, pokazać że istnieją otwarte zbiory U_1, U_2 takie, że
$$U_1 \cap U_2 = \varnothing\,, \qquad A \subset U_1\,, \qquad B \subset U_2\,.$$

Zadanie 2. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Odległość między rozłącznymi podzbiorami $A, B \subset X$ określamy formułą
$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}\,.$$

a) Załóżmy, że A jest domknięty, B zwarty i rozłączny z A. Wykazać, że $\operatorname{dist}(A, B) > 0$.

b) Znaleźć rozłączne i domknięte podzbiory $A, B \subset \mathbb{R}^2$ takie, że $\operatorname{dist}(A, B) = 0$.

c) Niech U będzie podzbiorem otwartym płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ takim, że
$$[-1, 1] \times [-1, 1] \subset U\,.$$
Udowodnić, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że
$$[-1-\varepsilon, 1] \times [-1, 1] \subset U\,.$$

Zadanie 3. Niech $X \times Y$ będzie produktem przestrzeni topologicznych. Załóżmy, że Y jest zwarta. Pokazać, że rzut $\pi_X : X \times Y \to X$ jest przekształceniem domkniętym. (czyli obrazy zbiorów domkniętych są domknięte)

Zadanie 4. Niech $X \times Y$ będzie produktem przestrzeni topologicznych spełniających własność Hausdorffa. Rozważmy funkcję $f : X \to Y$.

a) Załóżmy, że Y jest zwarta, a wykres $W(f)$ jest domkniętym podzbiorem $X \times Y$. Pokazać, że funkcja f jest ciągła.

b) Załóżmy, że wykres $W(f)$ jest zwarty. Pokazać, że funkcja f jest ciągła

c) Załóżmy, że f jest ciągła i X jest zwarty. Pokazać, że wykres $W(f)$ jest zwarty.

11 Zwartość 1

Teoria: Zwartość 2.1, 2.2.

Praca domowa. Niech $I(a;b) \subset \mathbb{R}^2$ będzie odcinkiem domkniętym łączącym punkt a z punktem b ($a \in \mathbb{R}^2$ i $b \in \mathbb{R}^2$). Które z następujących zbiorów są zwarte:

a) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} I((0,1);(\frac{1}{n},0)) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I((0,-1);(-\frac{1}{n},0))$,

b) $Y = X \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$,

c) $Z = X \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

Zadanie 1. Określ czy podane przestrzenie są zwarte:

- Kula jednostkowa $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n | d_{eu}(\mathbf{v},0) < 1\}$.
- Kula domknięta $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n | d_{eu}(\mathbf{v},0) \leq 1\}$.
- Sfera $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n | d_{eu}(\mathbf{v},0) = 1\}$.
- Hiperbola $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\}$
- Odcinek $(0,1]$ z topologią strzałki.
- Przestrzeń ilorazowa $[0,1]^n/\sim$, gdzie $\sim$ jest pewną relacją równoważności.

Zadanie 2. Załóżmy, że produkt kartezjański niepustych przestrzeni topologicznych $X \times Y$ jest zwarty. Wykazać, że X jest zwarty.

Zadanie 3. Niech $O(a,b) \subset \mathbb{R}^2$ będzie okręgiem którego średnicą jest odcinek o końcach $a, b \in \mathbb{R}^2$. Rozważmy zbiór $A \subseteq \mathbb{R} \times \{0\}$. Niech

$$O(A) = A \cup \bigcup_{a,b \in A, a \neq b} O(a,b).$$

Wykazać, że $O(A)$ jest zbiorem zwartym wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zwarte.

Zadanie 4. Uzasadnij, że ciągłe bijekcje skonstruowane na poprzednich zajęciach są homeomorfizmami.

Zadanie 5. Niech $A, B \subset X$ będą zwartymi podzbiorami przestrzeni topologicznej X spełniającej warunek Hausdorffa. Uzasadnić, że $A \cup B$ i $A \cap B$ są zwarte

Zadanie 6. Niech $A \subset (0,\infty)$ i niech $X(A)$ będzie podzbiorem płaszczyzny euklidesowej będącym sumą odcinków domkniętych łączących $(-1,0)$ z $(a, \frac{1}{a})$ dla $a \in A$. Pokaż, że

zbiór $X(A)$ jest domknięty $\iff$ zbiór A jest zwarty $\iff$ zbiór $X(A)$ jest zwarty.

12 Dodatki 2

Teoria: Wnętrze 1.2.20, Zbiory gęste i ośrodkowe 1.7, Twierdzenie Tietzego 1.6

Praca domowa. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną, a $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ciągiem elementów z X. Załóżmy, że X nie ma punktów izolowanych. Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w X. Ustalmy liczbę naturalną N.

a) Załóżmy, że $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna (czyli topologia pochodzi od pewnej metryki). Wykazać, że $\{a_n\}_{n>N}$ (ciąg bez pierwszych N elementów) jest gęsty w X.

b) Załóżmy, że $(X, \mathcal{T})$ spełnia aksjomat oddzielania T_1, czyli punkty są domknięte, dokładniej:

$$\forall_{x\in X} \text{ Podzbiór } \{x\} \text{ jest domknięty.}.$$

Wykazać, że $\{a_n\}_{n>N}$ (ciąg bez pierwszych N elementów) jest gęsty w X.

Punkt **b)** jest bardziej ogólny niż **a)** bo dowolna przestrzeń metryczna spełnia T_0.
Wskazówka: bez straty ogólności można założyć $N = 1$.

Zadanie 1. Sprawdzić czy $\mathbb{R}$ z topologią strzałki jest przestrzenią ośrodkową? Sprawdzić czy kwadrat leksykograficzny jest przestrzenią ośrodkową?

Zadanie 2. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi, a $(X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y})$ ich produktem. Załóżmy, że przestrzenie X i Y są niepuste (czyli $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$).

a) Załóżmy, że X i Y są ośrodkowe. Wykazać, że $X \times Y$ jest ośrodkowa.

b) Załóżmy, że $X \times Y$ jest ośrodkowa. Uzasadnić, że X jest ośrodkowa.

Zadanie 3. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Załóżmy, że X jest przestrzenią ośrodkową, a $f : X \to Y$ ciągłą funkcją "na". Uzasadnić, że Y jest ośrodkowa.

Zadanie 4. Rozważmy kwadrat leksykograficzny. Znaleźć wnętrza podzbiorów

$$A = (0,1) \times \frac{1}{2}, \qquad B = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

Zadanie 5 (T4)**.** Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Rozważmy domknięte podzbiory $A, B \subset X$. Załóżmy, że $A \cap B = \varnothing$. Pokazać, że istnieją otwarte zbiory U_1, U_2 takie, że

$$U_1 \cap U_2 = \varnothing, \qquad A \subset U_1, \qquad B \subset U_2.$$

Zadanie 6. Rozważmy podzbiór

$$B = \{f \in C[0,1] | \exists_{x\in[0,1]} f(x) = 0\}$$

w $C[0,1]$ z metryką supremum. Wyznaczyć jego wnętrze.

13 Przestrzenie ilorazowe

Praca domowa 1. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi, a $(X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y})$ ich produktem. Załóżmy, że przestrzenie X i Y są niepuste (czyli $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$).

a) Załóżmy, że X i Y są Hausdorffa. Wykazać, że $X \times Y$ jest Hausdorffa

b) Załóżmy, że $X \times Y$ jest Hausdorffa. Uzasadnić, że X jest Hausdorffa.

Teoria: Topologia ilorazowa 5.1. Używam notacji

$$S^n = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} | d_{eu}(\mathbf{v}, 0) = 1\}, \qquad D^n = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n | d_{eu}(\mathbf{v}, 0) \leq 1\}, \qquad I = [-1, 1] = D^1 .$$

Wszystkie te przestrzenie rozważane są z topologią euklidesową.

Zadanie 1. Znaleźć ciągłe bijekcje:

a) $I \sqcup I/\sim \to S^1$, dla relacji danej przez $(x, 1) \sim (x, 0)$ dla $x \in \{-1, 1\}$,

b) $D^2 \sqcup D^2/\sim \to S^2$, dla relacji danej przez $(x, 1) \sim (x, 0)$ dla $x \in S^1$,

c) $D^n \sqcup D^n/\sim \to S^n$, dla relacji danej przez $(x, 1) \sim (x, 0)$ dla $x \in S^{n-1}$.

Uzasadnij, że bijekcja z pierwszego podpunktu jest homeomorfizmem. Tak naprawdę wszystkie trzy są homeomorfizmami.

Zadanie 2 (Prosta z rozdwojonym punktem)**.** Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}/\sim$, gdzie relacja jest dana przez $(x, 1) \sim (x, 0)$ dla $x \neq 0$. Udowodnić, że ta przestrzeń nie jest Hausdorffa.

Zadanie 3 (Przestrzeń rzutowa)**.** Rozważmy relacje $\sim$ na $\mathbb{R}^n - \{0\}$ daną przez

$$\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2 \iff \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1) = \mathrm{lin}(\mathbf{v}_2) .$$

Przestrzeń ilorazową $(\mathbb{R}^n - \{0\})/\sim$ nazywamy przestrzenią rzutową i oznaczamy $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$. Rozważmy zbiór $U \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ dany przez

$$U = \{[x : y : z] | z \neq 0\} .$$

a) Udowodnić, że U jest otwarty w topologii ilorazowej.

b) Uzasadnić, że dopełnienie U jest homeomorficzne z $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$.

c) Wykazać, że $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ jest homeomorficzna z $S^{n-1}/\sim$, dla relacji danej prze $x \sim -x$.

Zadanie 4. Rozważmy relację $\sim$ na $S^1 \times I$ daną przez

$$\forall_{x,y \in S^1} (x, 1) \sim (y, 1), (x, -1) \sim (y, -1)$$

Znaleźć ciągłe bijekcje

a) $(S^1 \times I)/\sim \to D^2/S^1$,

b) $(S^1 \times I)/\sim \to S^2$.

Powyższe bijekcje są homeomorfizmami, więc D^2/S^1 jest homeomorficzne ze sferą S^2. Pomyśleć o uogólnieniu dla wyższych wymiarów.

14 Dodatki

Teoria: Produkt 1.3.6, Wnętrze 1.2.20, Kwadrat leksykograficzny przykład 1.2.8

Praca domowa 1. Określmy funkcję z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$ formułą:

$$f(x, y) = (2x, y)\,.$$

Znaleźć zbiór punktów ciągłości tej funkcji, rozpatrywanej jako przekształcenie

$$f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{d_k}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{d_r})\,,$$

gdzie $\mathcal{T}_{d_k}$, $\mathcal{T}_{d_r}$ są topologiami generowanymi przez metrykę kolejową i metrykę rzeka.

Zadanie 1. Niech $(X_1 \times X_2, \mathcal{T})$ będzie produktem kartezjańskim przestrzeni $(X_1, \mathcal{T}_1)$ i $(X_2, \mathcal{T}_2)$, i niech $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ będzie rzutowaniem (dla $i \in \{1, 2\}$).

(a) Pokaż, że jeśli U jest otwarty w $X_1 \times X_2$, to $p_i(U)$ jest otwarty w X_i.

(b) Podaj przykład zbioru domkniętego na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ (z topologią euklidesową) takiego, że jego rzut na jedną z osi nie jest domknięty.

Zadanie 2. Rozważmy podzbiory

$$A = \{f \in C[0, 1] | \forall_{x\in[0,1]} f(x) \geq 0\}$$

$$B = \{f \in C[0, 1] | \exists_{x\in[0,1]} f(x) = 0\}$$

w $C[0, 1]$ z metryką supremum. Wyznaczyć wnętrza tych podzbiorów.

Zadanie 3. Sprawdzić czy kwadrat leksykograficzny spełnia własność Hausdorffa?

Zadanie 4. Niech $([0, 1]^2, \mathcal{T})$ będzie kwadratem leksykograficznym. Znaleźć domknięcia i wnętrza podzbiorów

$$A = (0, 1) \times \frac{1}{2}\,, \qquad B = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right)\,.$$

Zadanie 5. Niech $X = A \cup B$, gdzie A, B są zbiorami otwartymi. Pokaż, że $f : X \to Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy obcięcia $f_{|A}, f_{|B}$ są ciągłe.

Zadanie 6. Wszystkie przestrzenie w tym zadaniu są rozważane z topologią euklidesową.

- Wykazać, że prosta $\mathbb{R}$ jest homeomorficzna z odcinkiem $(0, 1)$, oraz z półprostą $(0, \infty)$.
- Wykazać, że iloczyn okręgu i prostej jest homeomorficzny z płaszczyzną bez punktu.

15 Homeomorfizmy, Produkty

Praca domowa 1. Niech $\mathcal{T}$ będzie topologią Zariskiego (skrypt przykład 1.2.12) na zbiorze X. Niech

$$f : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$$

będzie dowolną bijekcją. Uzasadnić, że f jest ciągła.

Teoria: Homeomorfizmy skrypt 1.3.6, Produkty skrypt 1.4

Zadanie 1. Niech

$$X_0 = \mathbb{N}, \qquad X_1 = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, \qquad X_2 = \{0\} \cup \{\frac{1}{i} + \frac{1}{j} : i, j \in \mathbb{N}, \frac{1}{j} < \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\}$$

Pokaż, że żadne dwie z podprzestrzeni prostej euklidesowej X_0, X_1, X_2 nie są homeomorficzne.
Wskazówka: Sprawdzić, że przy homeomorfiźmie punkty izolowane przechodzą na punkty izolowane.

Zadanie 2. Niech $f : X \to Y$ będzie homeomorfizmem, oraz $A \subset X$, $B \subset Y$ podzbiorami takimi, że $B = f(A)$. Wtedy $f_{|A}$ jest homeomorfizmem pomiędzy A i B.

Zadanie 3. Niech $\mathcal{T}_1$ będzie topologią lewej strzałki na $\mathbb{R}$, a $\mathcal{T}_2$ topologią prawej strzałki na $\mathbb{R}$. Uzasadnić, że przestrzenie $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ i $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ są homeomorficzne.

Zadanie 4. Rozważmy przestrzenie topologiczne $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Rozważmy podzbiory $A \subset X, B \subset Y$. Niech $(X \times Y, \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y)$ będzie produktem kartezjańskim.

a) Załóżmy, że podzbiory A i B są domknięte. Uzasadnić, że podzbiór $A \times B$ jest domknięty w $X \times Y$.

b) Pokazać, że $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Zadanie 5. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

(a) $(X, \mathcal{T}_X)$ jest przestrzenią Hausdorffa

(b) Przekątna $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$ jest zbiorem domknietym w $X \times X$

Zadanie 6. Niech $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie przekształceniem ciągłym. Rozważmy wykres funkcji f:

$$W(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

(a) Pokaż, że $W(f)$ (z topologią podprzestrzeni produktu $X \times Y$) jest homeomorficzna z X.

(b) Pokaż, że jeśli przestrzeń Y jest Hausdorffa, to $W(f)$ jest domkniętym podzbiorem $X \times Y$.

---

16 Ciągłość 2

Zadanie 1. *Funkcją charakterystyczną* podzbioru $A \subseteq X$ nazywamy funkcję $f : X \to \mathbb{R}$, która przyjmuje 1 w punktach zbioru A i 0 wszędzie poza tym. Rozważmy topologię euklidesową na $\mathbb{R}$. Kiedy funkcja charakterystyczna podzbioru $A \subseteq X$ jest ciągła?

Zadanie 2. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ oraz $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi. Uzasadnij, że

1. Gdy $\mathcal{T}_Y = \{\varnothing, Y\}$ to dowolne przekształcenie $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe.
2. Gdy $\mathcal{T}_X$ jest topologią dyskretną to dowolne przekształcenie $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe.

Zadanie 3. Niech $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie ciągłym przekształceniem przestrzeni topologicznych. Uzasadnij, że dla dowolnego zbioru $B \subset Y$ zachodzi

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}).$$

Podaj przykład przekształcenia ciągłego dla którego to zawieranie nie jest równością

Zadanie 4. Określmy funkcję z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$ formułą:

$$f(x, y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}).$$

Znaleźć zbiór punktów ciągłości tej funkcji, rozpatrywanej jako przekształcenie

$$f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{d_k}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{d_r}).$$

Zadanie 5 (Kolokwium 2022/23)**.** Niech $\mathcal{T}_{d_k}$ będzie topologią generowaną przez metrykę kolejową na $\mathbb{R}^2$. Niech $\mathcal{T}_S$ oznacza topologię strzałki na prostej $\mathbb{R}$. Znaleźć zbiór punktów ciągłości przekształcenia

$$f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{d_k}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$$

danego przez $f(t, s) = t$.

17 Domknięcia 2, ciągłość

Praca domowa 1. Niech $(C[0,1], d_{sup})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z $[0,1]$ w $\mathbb{R}$ z metryką supremum. Znaleźć domknięcie zbioru

$$D = \{f \in C[0,1] | f \text{ jest ściśle rosnąca}\}$$

Zadanie 1. Znaleźć domknięcie otwartego przedziału $(0,1)$ w $\mathbb{R}$ z topologią lewej strzałki.

Zadanie 2. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Pokazać, że dla $A, B \subset X$ zachodzi

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}\,.$$

Zadanie 3. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Pokazać, że dla $A, B \subset X$ zachodzi

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}\,.$$

Podać przykład w którym powyższe zawieranie nie jest równością.

Topologia podprzestrzeni: Skrypt 1.2.9

Zadanie 4. Rozpatrzmy odcinek $[0,1]$ z topologią podprzestrzeni indukowaną z $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Czy $[0,1]$ ma punkty izolowane gdy

(a) $\mathcal{T}$ jest topologią strzałki.

(b) $\mathcal{T}$ jest topologią euklidesową.

Zadanie 5. Niech Y będzie podzbiorem przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Dla podzbioru $A \subset Y$ oznaczmy przez $\overline{A}^Y$ jego domknięcie w Y (gdzie Y jest przestrzenią topologiczną z topologią indukowaną z topologii na X w standardowy sposób), a przez $\overline{A}^X$ jego domkniecie w X.

(a) Pokaż, że $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.

(b) Pokaż, że jeśli $\overline{A}^Y = Y$, to $\overline{A}^X = \overline{Y}^X$.

Ciągłość: Skrypt 1.3.1

Zadanie 6. Na prostej $\mathbb{R}$ rozważmy trzy topologie

- $\mathcal{T}_1$ będzie topologią euklidesową
- $\mathcal{T}_2$ będzie topologią strzałki
- $\mathcal{T}_3 = \{\varnothing, \mathbb{R}\}$

Niech $h : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_i) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_j)$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0,1) \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,1) \end{cases}$$

Zbadaj ciągłość tej funkcji, dla $i \in \{1,2\}, j \in \{1,3\}$. (4 przypadki)

Zadanie 7. Określmy funkcję z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$ formułą:

$$f(x, y) = (x + 1, y)\,.$$

Czy ta funkcja jest ciągła, rozpatrywanej jako przekształcenie

a) $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{d_k}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{d_k})\,,$

b) $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{d_r}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{d_r})\,.$

Gdzie $\mathcal{T}_{d_k}$, $\mathcal{T}_{d_r}$ są topologiami generowanymi przez metrykę kolejową i metrykę rzeka.