Zadania z Funkcji Analitycznych, seria 8.

Zadania należy zgłosić mailowo do czwartku 13.I o godzinie 20.

Zadanie 1. Obliczyć metodami funkcji analitycznych całkę

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{10}{3} + 2cos(t)} dt\,.$$

Zadanie 2. Rozważmy funkcję

$$f(z) = \frac{1}{z^2(e^{i\pi z} + 1)}\,.$$

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ rozważamy pętlę $\gamma_n : [0, 16n] \to \mathbb{C}$ której obrazem jest kwadrat o wierzchołkach

$$2n(1 + i); 2n(-1 + i); 2n(-1 - i); 2n(1 - i).$$

a) Zauważyć, że f jest holomorficzna. Wyznaczyć zbiór punktów osobliwych f. Zauważyć, że żaden punk osobliwy nie należy do ścieżki γ_n (dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$).

b) Używając twierdzenia o residuach wykazać, że

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} f(z)dz = -\frac{i\pi}{4} - \frac{2}{i\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

c) Udowodnić, że

$$|\mathrm{Re(z)}| = \mathrm{2n} \Rightarrow |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mathrm{z}} + 1| \geqslant 1\,,$$

$$\mathrm{Im(z)} = \mathrm{2n} \Rightarrow |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mathrm{z}} + 1| \geqslant 1 - \mathrm{e}^{-2\pi}\,,$$

$$\mathrm{Im(z)} = -\mathrm{2n} \Rightarrow |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mathrm{z}} + 1| \geqslant \mathrm{e}^{2\pi} - 1\,.$$

Pomocna może okazać się nierówność trójkąta.

d) Niech $M = min(1, 1 - e^{-2\pi}, e^{2\pi} - 1) > 0$. Wykazać, że dla dowolnego t

$$|f(\gamma_n(t))| \leqslant \frac{1}{4M} \cdot \frac{1}{n^2}\,.$$

Wywnioskować stąd, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f(z) = 0\,.$$

e) Wywnioskować z poprzednich podpunktów, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Przekształcić do postaci

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$