Zadania z Funkcji Analitycznych, seria 6.

Zadanie 1. a). Niech F będzie funkcją holomorficzną w zbiorze otwartym wypukłym U, i taką, że $\mathrm{Re}F'(z) > 0$ dla $z \in U$. Wykazać że F jest różnowartościowa w U.
(wsk: $F(z_2) - F(z_1) = \int_{[z_1,z_2]} F'(z)dz$).

b). Pokazać że funkcja $F(z) = z + e^z$ jest różnowartościowa w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}z < 0$.

Zadanie 2. Niech

$$g(z) = \frac{z^2 + 2\cos z - 2}{e^z - z^2 - 1}.$$

Dowieść że funkcję g można przedłużyć do funkcji holomorficznej $\tilde{g}$ w pewnym otoczeniu zera i wyznaczyć współczynniki c_0, c_1, c_2 rozwinięcia $\tilde{g}$ w szereg Taylora $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ o środku w punkcie 0.

Zadanie 3. Niech

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)^2} + e^{1/z}$$

Określić czy w punktach $z_0 = 0$ i $z_0 = 2i$ jest osobliwość istotna, pozorna czy biegun (jeśli biegun, to którego rzędu).