Zadania z Funkcji Analitycznych, seria 5.

Zadania należy oddać pisemnie do 19.XI

Zadanie 1. Skonstruować homografię która przekształca górne półkole

$$D_+ = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leqslant 1; \mathrm{Im(z)} \geqslant 0\}$$

na ćwierćpłaszczyznę

$$X = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im(z)} \geqslant \mathrm{Re(z)}; \mathrm{Im(z)} \geqslant -\mathrm{Re(z)}\}.$$

Wynik można przedstawić jako złożenie homografii zadanych konkretnymi wzorami.

Zadanie 2. Znaleźć wszystkie punkty w których funkcja $f(z) = \bar{z}^2 \mathrm{Re(z)}$ jest różniczkowalna w sensie zespolonym.

Zadanie 3. Droga $\gamma : [0; \frac{3}{2}] \to \mathbb{C}$ jest dana wzorem

$$\gamma(t) = \left(2 - \frac{2}{3}t\right) e^{i\pi t}.$$

- Znaleźć obszar $U \subset \mathbb{C}$ zawierający drogę $\gamma([0; \frac{3}{2}])$ w którym funkcja $g(z) = \frac{1}{z-1}$ ma funkcję pierwotną.
- Policzyć całkę:

$$\int_\gamma \frac{3z^3 - z^2 - 2z + i}{z - 1} dz.$$

Zadanie 4. Rozwinąć w szereg Laurenta funkcję

$$f(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z+2)}$$

w pierścieniach

$$P_1 = \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}, \text{ oraz } P_2 = \{z \in \mathbb{C} | |z| > 2\}.$$

Wynik można przedstawić jako sumę kilku szeregów Laurenta.