Zadania z Funkcji Analitycznych, seria 4.

Zadanie 1. Przedstawić funkcję

$$f(z) = \frac{1}{(z^3+1)(z^3-2)}$$

jako sumę szeregu Laurenta, w pierścieniu $\{1 < |z| < \sqrt[3]{2}\}$

Zadanie 2. a) Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną i $\operatorname{im} f \subset \mathbb{R}$ to f jest stała.

b) Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Załóżmy, że funkcja $g(z) := \overline{f(z)}$ również jest holomorficzna. Wykazać, że f jest stała.

Zadanie 3. Policzyć całki:

a)

$$\int_\gamma \bar{z} dz$$

gdzie $\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

b)

$$\int_{[1,9i]} \sqrt{z} dz$$

gdzie $[1, 9i]$ jest odcinkiem łączącym punkty $1 \in \mathbb{C}$ i $9i \in \mathbb{C}$.

c)

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}} dz$$

gdzie $\gamma(t) = 4e^{it}, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Zadanie 4. Sprawdzić, że $(1 - iz)e^{iz}$ jest funkcją pierwotną dla ze^{iz} i znaleźć całkę

$$\int_{[\pi,i]} ze^{iz} dz.$$