Zadania z Funkcji Analitycznych, seria 10.

Zadanie należy zgłosić mailowo do czwartku 27.I o godzinie 20.

Zadanie 1. Rozpatrzmy wielomian

$$W(z) = z^5 + 4z^3 + z^2 - 1.$$

Określić ile pierwiastków (liczonych z krotnościami) ma W

a) w kole $\{z \in \mathbb{C} | 1 > |z|\}$,

b) w kole $\{z \in \mathbb{C} | 3 > |z|\}$,

c) w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 3\}$.

Zadanie 2. Niech $D = D(0,1)$ będzie otwartym dyskiem jednostkowym, a $\overline{D}$ jego domknięciem. Niech $f : U \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną określoną na pewnym otoczeniu $\overline{D}$ (czyli $\overline{D} \subset U$). Załóżmy, że

$$f(\overline{D}) \subset D.$$

Wykazać, że f ma dokładnie jeden punkt stały na D.

Wskazówka: Wykazać, że gdy $|z| = 1$ to $|z - (z - f(z))| < |z|$.