na wtorek 24.I.2023

Zadanie 1. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą kwadratową $n \times n$ o wyrazach ze zbioru $\{1, -1\}$. Uzasadnij, że

$$2^{n-1} | \det(A).$$

na piątek 20.I.2023

Zadanie 2. Rozważmy macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 11 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Uzasadnij, że macierz A jest odwracalna. Policz wyznacznik $\det(A^T B A^{-3})$.

na wtorek 17.I.2023

Zadanie 3. Niech $\mathbb{k}$ będzie ciałem. Rozważmy macierz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{k})$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Udowodnij, że A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy gdy $ad - bc \neq 0$.

na piątek 13.I.2023

Zadanie 4. Rozważmy przekształcenie liniowe $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dane przez

$$M_{st}^{st}(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sprawdź, że to monomorfizm. Zadaj wzorem przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $\varphi \circ \psi = id_{\mathbb{R}^2}$.

na czwartek 22.XII.2022

Zadanie 5. Niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym zadanym macierzą

$$M_{st}^{st}(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozważmy przekształcenie sprzężone $\psi^* : (\mathbb{R}^4)^* \to (\mathbb{R}^3)^*$. Znajdź wymiar jądra i obrazu ψ^*.

na wtorek 20.XII.2022

Zadanie 6. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\Bbbk$. Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie bazą tej przestrzeni. Rozpatrzmy wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$. Dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ niech $\beta_i \in \Bbbk^n$ będzie wektorem współrzędnych $\mathbf{v}_i$ w bazie $\mathcal{A}$, czyli

$$\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \Bbbk^n \iff \mathbf{v}_i = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n \in V\,.$$

Udowodnij, że układ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ jest liniowo niezależny w V wtedy i tylko wtedy gdy układ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ jest liniowo niezależny w $\Bbbk^n$.

Wskazówka: Rozważ przekształcenie liniowe $\theta : \Bbbk^n \to V$ takie, że $\theta(\mathbf{e}_i) = \alpha_i$. Wywnioskuj z faktu z wtorkowych ćwiczeń, że to izomorfizm. Zauważ, że $\theta(\beta_i) = \mathbf{v}_i$.
Uwaga: Powyższe zadanie to bardzo istotny fakt (użyliśmy go pod koniec ostatnich zajęć). Wynika z niego, że gdy mamy daną bazę przestrzeni V, to wszystkie rachunki można prowadzić w $\Bbbk^n$.

na wtorek 15.XI.2022

Zadanie 7. Znajdź bazę $\mathbb{R}^3$ w której wektor $(1, 2, 3)$ ma współrzędne $(1, 0, 1)$. Czy istnieje tylko jedna taka baza?

na wtorek 8.XI.2022

Zadanie 8. Rozważmy przestrzeń liniową

$$V = \operatorname{lin}\big((1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 3, 2, 0)\big) \subset \mathbb{R}^4$$

Rozstrzygnij czy

a) każdy wektor $(x, y, z, t) \in V$ jest rozwiązaniem równania

$$x + 2y - 3z + t = 0$$

b) Każdy wektor $(x, y, z, t) \in V$ spełnia nierówność $y \geq z$.

na piątek 4.XI.2022

Zadanie 9. Niech $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ będzie przestrzenią liniową (nad $\mathbb{R}$) ciągów o wyrazach rzeczywistych. Sprawdź czy podane podzbiory są podprzestrzeniami liniowymi.

a) Zbiór ciągów ograniczonych $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})_{ogr}$ czyli

$$F(\mathbb{N}, \mathbb{R})_{ogr} := \{(a_1, a_2, ...) \in F(\mathbb{N}, \mathbb{R}) | \exists_{C\in\mathbb{R}} \forall_{n\in\mathbb{N}}\, |a_n| \leq C\}\,.$$

b) Zbiór ciągów ograniczonych przez konkretną liczbę rzeczywistą $C > 0$. Czyli

$$F(\mathbb{N}, \mathbb{R})_{ogr,C} := \{(a_1, a_2, ...) \in F(\mathbb{N}, \mathbb{R}) | \forall_{n\in\mathbb{N}}\, |a_n| \leq C\}\,.$$

na piątek 28.X.2022

Zadanie 10. Rozwiąż w ciele liczb zespolonych układ równań dany macierzą

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & i & 1 \\ i & 1 & 1 & i \\ 2 & 1 & i & 1 \end{array}\right]$$

na wtorek 18.X.2022

Zadanie 11. Oblicz (przedstaw w formie $a + bi$)

$$(1 - i)^{85}.$$

Zadania na piątek 14.X.2022

Zadanie 12. Znajdź wszystkie $x \in \mathbb{Z}_5, x \neq 0$ takie, że

$$x^2 + \frac{1}{x} = 1.$$

Zadanie 13. Niech K będzie ciałem. Udowodnij, że dla dowolnych elementów $a, b \in K$ zachodzi

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$