termin oddania: piątek 24.I.2023.
Każde zadanie należy oddać na osobnej kartce.

GAL ostatnia seria

Zadanie 1. Rozważmy macierz $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć macierz odwrotną.

Zadanie 2. Zdefiniujmy

$$C(M_{3\times 3}(\mathbb{R})) = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) | \forall_{B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})} AB = BA\} \subseteq M_{3\times 3}(\mathbb{R})\,.$$

Niech A będzie macierzą 3×3 o wyrazach rzeczywistych. Udowodnić, że

$$A \in C(M_{3\times 3}(\mathbb{R})) \iff A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ dla pewnego } \lambda \in \mathbb{R}$$

Wskazówka: rozważyć

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3. Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$ będą pewnymi bazami przestrzeni $\mathbb{R}^4$, a $\mathcal{B}$ bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Rozważmy przekształcenia liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ i $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ zadane macierzami

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\psi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Wektor $\alpha \in \mathbb{R}^4$ ma współrzędne $(1, -1, 0, 2)$ w bazie $\mathcal{A}$. Znajdź współrzędne wektora $\psi(\varphi(\alpha))$ w bazie $\mathcal{C}$.