termin oddania: piątek 13.I.2023.
Każde zadanie należy oddać na osobnej kartce.

GAL seria 6

Zadanie 1. Niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$M_{st}^{st}(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozważmy bazę $\mathcal{A} = ((1,1,0);(1,0,1);(0,1,1))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i bazę $\mathcal{B} = ((2,3);(1,1))$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Znajdź macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\psi)$.

Zadanie 2. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\Bbbk$ a $\mathbf{v} \in V$ ustalonym wektorem. Udowodnić, że podzbiór

$$\{\varphi \in L(V,W) |\, \mathbf{v} \in \ker(\varphi)\} \subseteq L(V,W)$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $L(V,W)$.

Zadanie 3. Rozważmy bazę $\mathcal{A} = ((1,1,1);(1,-1,0);(0,1,0))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Znajdź bazę $\mathcal{A}^*$ sprzężoną do $\mathcal{A}$.

Zadanie 4. Rozważmy przekształcenie $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$\psi(x,y) = (x+y\,, 2x\,, x-y)\,,$$

oraz funkcjonał $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ dany wzorem

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_3\,.$$

Układ $\mathcal{B} = ((1,1);(2,4))$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Znajdź współczynniki funkcjonału $\psi^*(f)$ w bazie $\mathcal{B}^*$.

Zadanie 5. Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\Bbbk$. Rozważmy przekształcenie liniowe $\psi : V \to W$ i sprzężone przekształcenie $\psi^* : W^* \to V^*$. Udowodnij następujący fakt:

$$\psi \text{ jest epimorfizmem } \iff \psi^* \text{ jest monomorfizmem.}$$