termin oddania: piątek 20.XII.2022.
Każde zadanie należy oddać na osobnej kartce.

GAL seria 5

Zadanie 1. Rozważmy przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \ , \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \ , \ x_1 + 3x_3 + x_4) \, .$$

Znajdź bazy jądra i obrazu tego przekształcenia.

Zadanie 2. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ takie, że:

a) $\ker(\varphi) = \mathrm{lin}((1,1,3);(1,1,2))$ a $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{lin}((0,1,0,0);(2,7,9,41))$.

b) $\ker(\varphi) = \mathrm{lin}((1,1,3);(1,1,2))$ a $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{lin}((1,1,1,1))$.

Jeśli takie przekształcenie istnieje to podaj przykład (wzór przekształcenia, lub wartości na pewnej bazie).

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\varphi_r : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadane poprzez macierz w bazach standardowych:

$$M_{st}^{st}(\varphi_r) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & r & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

jest epimorfizmem?

Zadanie 4. Rozważmy przekształcenia $\psi, \varphi \colon \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$. Przekształcenie ψ jest dane wzorem

$$\psi(x,y) = (x + 2y, 3x + y) \, ,$$

a przekształcenie φ spełnia

$$\varphi(1,1) = (1,0) \, , \qquad \varphi(1,2) = (2,3) \, .$$

Wyznacz macierz $M_{st}^{st}(\varphi \circ \psi)$.

Zadanie 5. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową, a $\phi : V \to V$ przekształceniem liniowym takim, że $\phi \circ \phi = \phi$.

a) Udowodnij, że $\ker(\phi) \oplus \mathrm{im}(\phi) = V$.

b) Wykaż, że ϕ jest rzutem na $\mathrm{im}(\phi)$ wzdłuż $\ker(\phi)$.

W punkcie **b)** można założyć, że punkt **a)** jest spełniony.