termin oddania: piątek 13.XII.2022.
Każde zadanie należy oddać na osobnej kartce.

GAL seria 4, wersja druga

Zadanie 1. Niech $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń liniową (nad ciałem $\mathbb{R}$) funkcji z liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste. Rozpatrzmy zbiór V_1 funkcji parzystych czyli

$$V_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | \forall_{x\in\mathbb{R}}\, f(x) = f(-x)\},$$

oraz zbiór V_2 funkcji nieparzystych czyli

$$V_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) | \forall_{x\in\mathbb{R}}\, f(x) = (-1)\cdot f(-x)\}.$$

Pokaż, że te zbiory są podprzestrzeniami liniowymi $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Udowodnij, że

$$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$$

(czyli $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = V_1 + V_2$ i $V_1 \cap V_2 = \{0\}$).

Zadanie 2. Przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ spełnia

$$\varphi(1,2,0) = (1,1,1,1)\,, \qquad \varphi(1,0,1) = (1,0,1,0)\,, \qquad \varphi(0,1,0) = (1,1,0,0)\,.$$

Zapisz φ wzorem.

Zadanie 3. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}_{\leqslant n}[x]$ wielomianów stopnia nie większego niż n. Rozważmy funkcję $\phi : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$ daną przez

$$\phi(W) = W\cdot(x+2)\,.$$

Pokaż, że ϕ jest przekształceniem liniowym. Rozważmy bazy

$$\mathcal{A} = \{1, x-2, x^2-2x+4\}\,,$$
$$\mathcal{B} = \{x, 2, x^2-x, x^3-2\}\,.$$

przestrzeni $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ i $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$. Znajdź macierz $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\phi)$.

Zadanie 4. Niech V_1 będzie podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^4$ opisaną równaniem:

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\,.$$

Niech $V_2 = \mathrm{lin}((1,t,1,1),(1,0,s,1))$. Dla jakich parametrów rzeczywistych s,t zachodzi

a) $V_2 \subseteq V_1$,

b) $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$.

Zadanie 5. Rozważmy przestrzeń liniową V skończonego wymiaru $n \geqslant 2$ nad ciałem $\mathbb{k}$. Niech $V_1 \subset V$ i $V_2 \subset V$ będą dwoma różnymi ($V_1 \neq V_2$) podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni V (nad $\mathbb{k}$). Udowodnij, że:

a) Gdy $\dim V_1 = \dim V_2 = n-1$ to

$$\dim(V_1 \cap V_2) = n-2\,.$$

b) Jeśli $\dim V_1 = \dim V_2$ i $\dim(V_1 \cap V_2) = n-2$ to

$$V_1 + V_2 = V\,.$$