termin oddania: piątek 25.XI.2022.
Każde zadanie należy oddać na osobnej kartce.

GAL seria 3

Zadanie 1. Rozważmy wektory $\alpha_1 = (1,0,1), \alpha_2 = (2,3,4), \alpha_3 = (3,6,7) \in \mathbb{R}^3$, oraz wektor $\beta_a = (a,9,4) \in \mathbb{R}^3$ zależny od parametru $a \in \mathbb{R}$.

a) Rozstrzygnij czy układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest liniowo niezależny?

b) Dla jakich wartości parametru a zachodzi $\beta_a \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$?

c) Czy istnieje takie $a \in \mathbb{R}$, że wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ tworzą bazę $\mathbb{R}^3$?

Zadanie 2. Rozważmy wektory $\alpha_1 = (1,1,0), \alpha_2 = (2,3,1), \alpha_3 = (5,6,2) \in \mathbb{R}^3$.

a) Uzasadnij że układ $\mathcal{B} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ to baza $\mathbb{R}^3$.

b) Niech $\mathbf{v}$ będzie wektorem o współrzędnych $(2,4,1)_{\mathcal{B}}$ w bazie $\mathcal{B}$. Wyznacz jego współrzędne w bazie standardowej.

c) Niech $\mathbf{v}$ będzie wektorem o współrzędnych $(2,4,1)$ w bazie standardowej. Wyznacz jego współrzędne w bazie $\mathcal{B}$.

Zadanie 3. Opisz układem równań podprzestrzeń liniową (nad $\mathbb{C}$)

$$V = \operatorname{lin}\left((2,i,i,1+i),(-2i,1,0,2-4i)\right) \subseteq \mathbb{C}^4 .$$

Sprawdź czy $(4i,-2,1,3i) \in V$?

Zadanie 4. Rozważmy przestrzeń

$$V = \{(x_1,...,x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_1 + 2x_3 - x_5 = 0\} \subset \mathbb{R}^5$$

Niech $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ będzie pewną bazą tej przestrzeni. Niech $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_5$ będzie bazą standardową $\mathbb{R}^5$. Dla jakich $i \in \{1,2,3,4,5\}$ układ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \mathbf{e}_i)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^5$.

Zadanie 5. Policz rząd macierzy o wyrazach z ciała $\mathbb{Z}_{11}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 & 9 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$