termin oddania: wtorek 8.XI.2022.
Każde zadanie należy oddać na osobnej kartce.

GAL seria 2

Zadanie 1. Rozłóż wielomian

$$W(x) = x^4 + 10x^2 + 169$$

na czynniki nierozkładalne w $\mathbb{C}[x]$ i $\mathbb{R}[x]$.
Można uzależnić wynik od kąta $\alpha = \arccos\left(\frac{5}{13}\right)$, czyli jedynego α takiego, że

$$\cos(\alpha) = \frac{5}{13} \text{ oraz } \alpha \in [0, \pi]\,.$$

Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby zespolone z spełniające

$$\frac{\overline{z}^2}{z} = \frac{i - \sqrt{3}}{10}\,.$$

Zadanie 3. Rozważmy liczbę zespoloną $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{i+1}$, oraz zbiór

$$D = \{w \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(iw) > 0\}\,.$$

a) Znajdź $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $z^{100} = a + bi$.

b) Naszkicuj zbiór D.

c) Dla jakich $k \in \mathbb{N}$ spełniających $24 \geqslant k \geqslant 1$ zachodzi $z^k \in D$?

Zadanie 4. Rozważmy zbiory

$$X = \{z \in \mathbb{C} | \; \mathrm{Im}\,(z) \geqslant |\mathrm{Re}\,(z)|\}\;,$$
$$Y = \left\{z \in \mathbb{C} | \; \mathrm{Im}\left((1-i)z^2\right) \geqslant \left|\mathrm{Re}\left((1-i)z^2\right)\right|\right\}\;.$$

oraz funkcję $f(z) = i\overline{z}^2 + 1$. Naszkicuj zbiory X, Y i $f(X)$.

Zadanie 5. Niech $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ będzie przestrzenią liniową (nad $\mathbb{Q}$) funkcji z liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste. Sprawdź czy podzbiór

$$A = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \forall_{n \in \mathbb{N}} \; f(n) \in \mathbb{Q}\}$$

(funkcje z liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste, które przyjmują wartości wymierne w liczbach naturalnych) jest podprzestrzenią liniową nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$?