

termin oddania wtorek 14.I.2020.  
Należy oddać 4 z 5 zadań (w tym 5), każde na osobnej kartce.

## GAL ostatnia seria

**Zad 1.** Niech  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  będą bazami przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  i  $\mathbb{R}^4$ . Niech

$$\mathcal{A} = \{(1, 2, 7), (-2, 1, 1), (0, -3, 5)\}.$$

Rozważmy funkcjonal  $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$  dany wzorem

$$\varphi(x, y, z) = -21x + 5y + 3z,$$

oraz przekształcenie liniowe  $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  takie, że

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -10 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz współczynniki funkcjonału  $\psi^*(\varphi)$  w bazie  $\mathcal{B}^*$ .

**Zad 2.** Dane są macierze  $A, B \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Policz wyznacznik  $\det(A^2 B^T A^{-3} B)$ .

**Zad 3.** Niech  $V$  i  $W$  będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem  $k$ , a  $\psi : V \rightarrow W$  przekształceniem liniowym. Udowodnij następujący fakt:

$$\psi \text{ jest epimorfizmem} \iff \psi^* \text{ jest monomorfizmem}.$$

**Zad 4.** Rozważmy macierz

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 0 & t^2 & 0 \\ 1 & t-1 & 1 & t \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & t+1 & -1 \end{bmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

zależną od parametru  $t \in \mathbb{R}$ . Dla jakich wartości parametru  $t$  macierz  $A_t$  jest odwracalna? Wyznacz macierz  $A_1^{-1}$ .

**Zad 5.** Rozważmy macierz

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & i & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{bmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{C}).$$

Zdefiniujmy liczby Fibonacciego rekurencyjnym wzorem:

$$\begin{cases} F_1 = 1, \\ F_2 = 2, \\ F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \text{ dla każdego } i \geq 3. \end{cases}$$

Udowodnij, że

$$\det(A_n) = F_n$$

dla każdej liczby naturalnej dodatniej  $n$ .