

termin oddania wtorek 3.XII.2019.  
Należy oddać 4 z 5 zadań (w tym 5), każde na osobnej kartce.

## GAL seria 5

**Zad 1.** Niech  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  oznacza przestrzeń liniową (nad ciałem  $\mathbb{R}$ ) funkcji z liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste. Rozpatrzmy zbiór  $V_1$  funkcji parzystych czyli

$$V_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} f(x) = f(-x)\},$$

oraz zbiór  $V_2$  funkcji nieparzystych czyli

$$V_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} -f(x) = f(-x)\}.$$

Pokaż, że te zbiory są podprzestrzeniami liniowymi, oraz że

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$$

(czyli  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = V_1 + V_2$  i  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ).

**Zad 2.** Czy układ równań

$$\begin{cases} 6x + 4y + 2z = 4 \\ 11x + 7y + 4z = 7 \\ 9x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

Ma rozwiązanie (w liczbach rzeczywistych)?

**Zad 3.** Niech  $V_1$  będzie podprzestrzenią liniową  $\mathbb{R}^4$  opisaną równaniem:

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Niech  $V_2 = \text{lin}((1, t, 1, 1), (1, 0, s, 1))$ . Dla jakich parametrów rzeczywistych  $s, t$  zachodzi

- a)  $V_2 \subseteq V_1$
- b)  $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^4$
- c)  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

**Zad 4.** Rozważmy układ równań jednorodnych zadany przez macierz układu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & t & t & t & t & t & t \end{bmatrix}$$

Oblicz wymiar przestrzeni rozwiązań  $V_t \subset \mathbb{R}^7$  w zależności od parametru  $t \in \mathbb{R}$ .

**Zad 5.** Rozważmy przestrzeń liniową  $W$  skończonego wymiaru  $n = \dim W$ . Załóżmy, że  $\dim W = n \geq 2$ . Załóżmy, że  $U \neq V$  są dwoma różnymi podprzestrzeniami  $W$ . Udowodnij, że:

**a)** gdy  $\dim U = \dim V = n - 1$  to

$$\dim U \cap V = n - 2$$

**b)** gdy  $\dim U = \dim V$  i  $\dim U \cap V = n - 2$  to

$$U + V = W$$