

termin oddania wtorek 10.XII.2019.
Należy oddać 4 z 5 zadań (w tym 5), każde na osobnej kartce.

GAL seria 6

Zad 1. Rozważmy przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 6x_4, x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 7x_4, x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4)$$

Znajdź bazy i wymiary jądra i obrazu tego przekształcenia.

Zad 2. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad pewnym ciałem k . Rozważmy podprzestrzenie liniowe $V_1 \subset V$ i $W_1 \subset W$, oraz zbiór

$$A = \{\phi \in L(V, W) \mid \phi(V_1) \subset W_1\} \subset L(V, W)$$

(przekształcenia liniowe z przestrzeni V do W takie, że obraz podprzestrzeni V_1 jest zawarty w W_1). Udowodnij, że A jest podprzestrzenią liniową.

Zad 3. Dla parametru $a \in \mathbb{R}$ rozważmy przekształcenie liniowe $\phi_a : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$\phi_a(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4, 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4, x_1 + 3x_2 + ax_3, x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4)$$

a) Dla jakich wartości parametru a zachodzi $\dim \ker(\phi_a) = 1$?

b) Dla $a = -1$ znajdź bazę jądra i obrazu ϕ .

Zad 4. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ takie, że:

a) $\ker(\phi) = \text{lin}((1, 1, 3); (1, 1, 2))$ a $\text{im}(\phi) = \text{lin}((0, 1, 0, 0); (2, 7, 9, 41))$.

b) $\ker(\phi) = \text{lin}((1, 1, 3); (1, 1, 2))$ a $\text{im}(\phi) = \text{lin}((1, 1, 1, 1))$.

Jeśli takie przekształcenie istnieje to podaj wzór przykładowego przekształcenia spełniającego warunki.

Zad 5. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową, a $\phi : V \rightarrow V$ przekształceniem liniowym takim, że $\phi \circ \phi = \phi$.

a) Udowodnij, że $\ker(\phi) \oplus \text{im}(\phi) = V$

b) Zakładając punkt a) wykaż, że ϕ jest rzutem na $\text{im}(\phi)$ wzdłuż $\ker(\phi)$.