

termin oddania wtorek 12.XI.2019.

Należy oddać 3 z 4 pierwszych zadań i zadanie 5, każde na osobnej kartce.

## GAL seria 3

**Zad 1.** Sprawdź czy zbiór

$$A = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall_{n \in \mathbb{N}} f(n) \in \mathbb{Q}\}$$

(funkcje z liczb rzeczywistych w liczby rzeczywiste, które przyjmują wartości wymierne w liczbach naturalnych) jest podprzestrzenią liniową nad ciałem liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$ ?

**Zad 2.** Rozważmy wektory:

$$\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (2, 3, 4), \alpha_3 = (3, 6, 7) \in \mathbb{R}^3$$

oraz wektor  $\beta_a = (a, 9, 4)$ . Wyznacz (o ile istnieją) takie wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$ , że

- a)  $\beta_a \in \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ .
- b) Układ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_a$  jest bazą przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ .

**Zad 3.** Rozważmy przestrzeń liniową

$$V = \text{lin} \left( (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 3, 2, 0) \right) \subset \mathbb{R}^4$$

Rozstrzygnij czy

- a) każdy wektor  $(x, y, z, t) \in V$  jest rozwiązaniem równania

$$x + 2y - 3z + t = 0$$

- b) Każdy wektor  $(x, y, z, t) \in V$  spełnia nierówność  $y \geq z$ .

**Zad 4.** Rozważmy wektory:

$$\alpha_1 = (1, 1, 0), \alpha_2 = (2, 3, 1), \alpha_3 = (5, 6, 2) \in \mathbb{R}^3$$

Wykaż, że to baza przestrzeni liniowej  $\mathbb{R}^3$ . Znajdź współczynniki wektora  $(0, 1, 0)$

**Zad 5.** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad ciałem  $K$ , a  $V_1, V_2, W \subset V$  jej podprzestrzeniami liniowymi

- a) Uzasadnij, że

$$(V_1 \cap W) + (V_2 \cap W) \subseteq (V_1 + V_2) \cap W$$

- b) Znajdź przykład, w którym powyższe zawieranie nie jest równością.