3. Zadania z Funkcji Analitycznych, seria 3.

Zadanie 3.1. Znaleźć homografię, która przekształca obszar między stycznymi wewnętrznie okręgami $\{|z| = 2\}$ oraz $\{|z-1| = 1\}$ na obszar $|\mathrm{Re} z| < 1$.

Zadanie 3.2. Uzasadnić że jeśli funkcja f, określona w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$ ma pochodną (w sensie zespolonym) w punkcie $z_0 \in U$, to funkcja

$$g(z) = \overline{(f(\overline{z}))}$$

ma pochodną (w sensie zespolonym) w punkcie $\overline{z_0}$. Wyznaczyć $g'(\overline{z_0})$.

Zadanie 3.3. Wyznaczyć wszystkie punkty $z \in \mathbb{C}$, w których funkcja

$$f(z) = 8x - x^3 - xy^2 + i(x^2y + y^3 - 8y)$$

(gdzie $z = x + iy$) jest różniczkowalna w sensie zespolonym.

Zadanie 3.4. Niech $U \subset \ C$ obszar. Niech $f : U \to \mathbb{C}$ będzie niestała funkcją holomorficzną. Oznaczmy $u(z) = \mathrm{Re} f(z), v(z) = \mathrm{Im} f(z)$. Zbadać holomorficzność funkcji $g : U \to \mathbb{C}$, określonej wzorem:

$$g(z) = u^2(z) + iv^2(z)$$

(uwaga: w zadaniach 3.5 i 3.6 używamy głównej gałęzi potęgi i głównej gałęzi logarytmu).

Zadanie 3.5. Wyznaczyć:

a). $\mathrm{Log}(-1 + \mathrm{i})$
b). $i^{\frac{1}{i}}$
c). $(\sqrt{3} + i)^i$
d). $(1 - i)^{3i}$
e). $i^{4i} - (i^4)^i$

Zadanie 3.6. Wykazać że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+i}}$$

jest rozbieżny. (wsk: Rozważyc oddzielnie część rzeczywistą i urojoną. Zauważyć że pojawia się szereg pochodnych pewnej funkcji, wyliczonych w punktach n, $n \in \mathbb{N}$.)

Zadanie 3.7. a). Wykazać że jeśli

$$\mathrm{Re} z_1 > 0 \qquad \text{i} \qquad \mathrm{Re} z_2 > 0$$

to

$$\mathrm{Log}(\mathrm{z}_1 \cdot \mathrm{z}_2) = \mathrm{Log} \mathrm{z}_1 + \mathrm{Log} \mathrm{z}_2.$$

b). Wskazać liczby zespolone z_1 i z_2 takie, że

$$\mathrm{Log}(\mathrm{z}_1 \cdot \mathrm{z}_2) \neq \mathrm{Log} \mathrm{z}_1 + \mathrm{Log} \mathrm{z}_2.$$