2. Zadania z Funkcji Analitycznych, seria 2

Zadanie 2.1. Znaleźć obraz płaszczyzny, oraz obraz koła $|z| < 1$ przy przekształceniu

$$z \mapsto \frac{z-1}{z+1}.$$

Wyznaczyć obraz pasa $|\mathrm{Re(z)}| < \frac{\pi}{2}$ przy przekształceniu tangens: $z \mapsto \mathrm{tg}(z)$. Wskazówka: Zauważmy że

$$\mathrm{tg}(z) = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Zatem tangens to złożenie

$$z \mapsto iz \mapsto e^{iz} \mapsto (e^{iz})^2 = e^{2iz} \mapsto (-i)\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

Zadanie 2.2. Wyznaczyć wszystkie punkty w których funkcja

$$f(x + iy) = xe^y + iye^x$$

jest różniczkowalna w sensie zespolonym.

Zadanie 2.3. Sprawdzić że homografia zachowuje *dwustosunek*:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}.$$

Zadanie 2.4. Znaleźć obraz górnego półkola $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Im}z > 0\}$ przy homografii

$$h(z) = \frac{2z - i}{2 + iz}$$

Zadanie 2.5 (Zebrane własności homografii)**.** Proszę przekonać się czy potrafią Panstwo uzasadnić następujące własności homografii. Poniżej h oznacza homografię.

- Każdą homografię można przedstawić jako złożenie przekształceń afinicznych i przekształcenia $z \mapsto \frac{1}{z}$.
- Każda homografia h rozszerza się do homeomorfizmu rozszerzonej płaszczyzny (czyli $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, z topologią wyznaczoną przez metrykę otrzymaną z rzutu stereograficznego).
- Obrazem okręgu przy homografii jest okrąg lub prosta, uzupełniona punktem w nieskończoności (krótko: okrąg uogólniony). Podobnie: obraz prostej uzupełnionej punktem w nieskończoności.
- Jeśli punkty p iq są symetryczne względem okręgu C, to punkty $h(p)$, $h(q)$ są symetryczne względem $h(C)$. Również przypadek graniczny: jeśli p jest środkiem okręgu C, zaś $q = \infty$, to para punktów $h(p)$,$h(\infty)$ jest symetryczna względem okręgu (uogólnionego) $h(C)$. Ta obserwacja często ułatwia szybkie znalezienie obrazu okręgu (koła) przy homografii.

- Jeśli C jest okręgiem i $h(C)$ jest okręgiem, to obrazem koła D ograniczonego okręgiem C jest koło ograniczone okręgiem $h(C)$ lub zewnętrze (otwarte) tego koła, uzupełnione punktem w nieskończoności. Jeśli zaś $h(C)$ jest prostą (uzupełnioną punktem w nieskończoności), to obrazem $h(D)$ jest jedna z wyznaczonych przez tę prostą półpłaszczyzn.
- Jedyną homografią h taką że $h(0) = 0, h(1) = 1, h(\infty) = \infty$ jest identyczność,
- Jeśli $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ trójka różnych punktów, i podobnie $A, B, C \in \hat{\mathbb{C}}$ -trójka różnych punktów, to istnieje dokładnie jedna homografia h taka że $h(a) = A, h(B) = B, h(c) = C$.

Zadanie 2.6. Niech $a, \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, $|a| < 1$. Wykazać że homografia

$$h_{a,\lambda}(z) = \lambda \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}$$

przekształca koło jednostkowe D na D. Wykazać też że jeśli h jest homografią przekształcającą D na D, to istnieją $a, \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, $|a| < 1$ takie że $h = h_{a,\lambda}$,