1. Zadania z Funkcji Analitycznych, seria 1.

Zadanie 1.1. a). Przedstawić w postaci $a + bi$ następujące liczby zespolone:

$$(1 + i\sqrt{3})^6, \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^4, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - i \ln 2)$$

b). Sprawdzić że gdy $|z| = r > 0$, to $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{r^2}{z}\right)$.

Zadanie 1.2. Wykazać że jeśli szereg $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ jest zbieżny i $|\mathrm{Arg}(z_k)| \leqslant c < \frac{\pi}{2}$, to szereg $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ jest zbieżny.

Zadanie 1.3. Zbadać dla jakich z funkcje $\cos(z)$, $\sin(z)$, $\mathrm{tg}(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ przyjmują wartości rzeczywiste.

Zadanie 1.4. Pokazać, że homografia

$$h(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

przeprowadza półpłaszczyznę

$$H_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im(z)} > 0\}$$

na dysk jednostkowy

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Opisać obraz prostych $K_x = \{z : \mathrm{Re(z) = x}\}$, oraz $l = \{z : \mathrm{Re(z)} + \mathrm{Im(z)} = 1\}$.

Zadanie 1.5. Niech

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

(czyli $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ad - bc = 1$). Udowodnić, że homografia

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

zachowuje górną półpłaszczyznę

$$H_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im(z)} > 0\}.$$

Zadanie 1.6. Niech $z_1, z_2, \ldots z_n \in \mathbb{C}$. Wykazać że jeśli dla pewnego $w \in \mathbb{C}$ mamy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w - z_i} = 0$$

to $w \in \mathrm{conv}(z_1, \ldots z_n)$. (uwypuklenie zbioru $\{z_1, \ldots, z_n\}$ na płaszczyźnie).