

Topologia I, Kolokwium, część 1

2025-12-06

Rozwiązanie każdego zadania należy zapisać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę prosimy podpisać podając imię i nazwisko, numer indeksu oraz numer grupy lub nazwisko prowadzącego ćwiczenia. **We wszystkich rozwiązaniach należy podać uzasadnienie.**

Zadanie 1 (10 p.). Niech

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2^{-2n-1} < x \leq 2^{-2n}\}.$$

Znajdź domknięcie i wnętrze zbioru A względem

1. topologii euklidesowej,
2. topologii indukowanej przez metrykę rzeki.

Zadanie 2 (10 p.). Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną, a $C_0, C_1, C_2, \dots$ ciągiem jej domkniętych podzbiorów takim, że każdy punkt w X ma otoczenie, które przecina tylko skończenie wiele z nich, tzn.

dla każdego $a \in X$, istnieje otwarty podzbiór $U \subseteq X$ taki, że $a \in U$
i istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n \geq m$, $U \cap C_n = \emptyset$.

1. Wykaż, że zbiór $\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ jest domknięty w X .
2. Załóżmy dodatkowo, że $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$, a Y jest dowolną przestrzenią topologiczną. Udowodnij, że jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją taką, że obcięcie $f_n = f|_{C_n}$ jest ciągłe dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to f jest ciągła.

Topologia I, Kolokwium, część 2

2025-12-06

Rozwiązanie każdego zadania należy zapisać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę prosimy podpisać podając imię i nazwisko, numer indeksu oraz numer grupy lub nazwisko prowadzącego ćwiczenia. **We wszystkich rozwiązaniach należy podać uzasadnienie.**

Zadanie 3 (10 p.).

$$\mathcal{B} = \{U_{x_0, y_0} \mid (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2\}, \text{ gdzie } U_{x_0, y_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > x_0 \text{ i } y > y_0\}.$$

1. Udowodnij, że rodzina $\mathcal{B}$ jest bazą pewnej topologii $\mathcal{O}$ na $\mathbb{R}^2$.
2. Sprawdź, że topologia $\mathcal{O}$ jest ściśle uboższa od topologii euklidesowej.
3. Rozstrzygnij, czy przestrzeń topologiczna $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ ma własność T_0 i czy ma własność T_1 .

Przypomnienie. Przestrzeń topologiczna X ma własność T_0 , jeśli

dla dowolnych $a, b \in X$ takich, że $a \neq b$, istnieje podzbiór otwarty $U \subseteq X$ taki, że $a \in U$ i $b \notin U$
lub istnieje podzbiór otwarty $V \subseteq X$ taki, że $b \in V$ i $a \notin V$.

Ma ona własność T_1 , jeśli

dla dowolnych $a, b \in X$ takich, że $a \neq b$, istnieje podzbiór otwarty $U \subseteq X$ taki, że $a \in U$ i $b \notin U$.

Zadanie 4 (10 p.). Niech $X = Y = \mathbb{R}$, gdzie X rozważamy z topologią euklidesową, a Y z topologią strzałki (ze zbiorami bazowymi postaci $[a, b)$ dla $a < b$). Rozstrzygnij, które z następujących przestrzeni są homeomorficzne:

1. $A = \{(x, -x) \mid x \in [0, \infty)\}$ z topologią podprzestrzeni w $X \times X$,
2. $B = A$ z topologią podprzestrzeni w $X \times Y$,
3. $C = A$ z topologią podprzestrzeni w $Y \times Y$,
4. $D = (-\infty, 0]$ z topologią podprzestrzeni w Y .