

Topologia I/I*, Kolokwium

2024-12-09

Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę prosimy podpisać podając imię i nazwisko, numer indeksu oraz numer grupy lub nazwisko prowadzącego ćwiczenia. **We wszystkich rozwiązaniach należy podać uzasadnienie.**

Zadanie 1 (10 p.). Znajdź wnętrze i domknięcie następujących zbiorów A i B w kwadracie leksyko-graficznym $([0, 1]^2, \mathcal{T}_{\text{lex}})$.

1. $A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid y \leq |2x - 1|\}$

2. $B = \{(x, |\sin(\pi/x)|) \mid x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}\}$

Zadanie 2 (10 p.). Niech d_r oznacza metrykę rzeki, a d_k metrykę kolejową na $\mathbb{R}^2$. Ponadto niech $\mathcal{T}_S$ będzie topologią strzałki na $\mathbb{R}$ (generowaną przez zbiory bazowe $(a, b]$ dla $a < b$). Rozstrzygnij, które z następujących przestrzeni są homeomorficzne.

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1\} \text{ z topologią podprzestrzeni w } (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(d_k))$$

$$B = \{(x, y) \mid x^2 + (y + 1)^2 = 1\} \text{ z topologią podprzestrzeni w } (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(d_r))$$

$$C = \{(x, y) \mid (x - 2)^2 + y^2 = 1\} \text{ z topologią podprzestrzeni w } (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}(d_r))$$

$$D = \{(x, y) \mid (x + 2)^2 + y^2 = 1\} \text{ z topologią podprzestrzeni w iloczynie } (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$$

Zadanie 3 (10 p.). Wszystkie poniższe zbiory rozważamy jako podprzestrzenie przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z topologią euklidesową. Niech

$$T(a, b, c) = \{pa + qb + rc \mid p, q, r \geq 0, p + q + r = 1\}$$

oznacza trójkąt o wierzchołkach $a, b, c \in \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że podzbiory $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ są domknięte i niepuste. Wykaż, że

$$X = \bigcup_{a \in A, b \in B, c \in C} T(a, b, c)$$

jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy A, B i C są zwarte.

Zadanie 4 (10 p.). Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zwartym wypukłym podzbiorem takim, że $0 \in \text{Int } A$.

- Niech $x \in A$, $x \neq 0$. Pokaż, że odcinek $\{tx \mid 0 < t < 1\}$ jest zawarty w $\text{Int } A$.
- Dla $x \in S^{n-1}$, niech $r(x) = \sup\{t \in [0, \infty) \mid tx \in A\}$. Sprawdź, że $r(x)x \in \text{bd } A$ (gdzie $\text{bd } A = \bar{A} \setminus \text{Int } A$ jest brzegiem zbioru A).
- Udowodnij, że przekształcenie $f : \text{bd } A \rightarrow S^{n-1}$ zadane wzorem $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ jest homeomorfizmem (gdzie $\|x\| = d_e(0, x)$ jest normą euklidesową).