

KOŁOKWIUM Z TOPOLOGII
02.12.21

Pisząc rozwiązania można powoływać się na twierdzenia i fakty, które były sformułowane w skrypcie lub listach zadań wykładowcy. Inne zadania lub fakty należy przytaczać wraz z pełnym uzasadnieniem. Każdą kartkę, którą chce się oddać w postaci skanu należy podpisać swoim imieniem i nazwiskiem. Bardzo prosimy o przesyłanie plików w formacie .pdf

Czas pracy: 2 godz. 30 minut (wliczając w to czas na przesłanie plików)

Zadanie 1. (10 punktów)

(a) Niech $X = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{N}$ będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej. Niech

$$A = X \cap \left((\sqrt{3}, 3) \times \left(\frac{1}{3}, 3 \right) \right).$$

Wyznacz domknięcie i wnętrze zbioru A w przestrzeni X .

(b) Niech B będzie następującym podzbiorem płaszczyzny:

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 0, \text{ oraz } \frac{1}{2n+1} < \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2n} \right\}.$$

Wyznacz domknięcie i wnętrze zbioru B w przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_k)$, gdzie d_k oznacza metrykę kolejową na płaszczyźnie.

Zadanie 2. (10 punktów) Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x, y) = (x - 1, y - 1)$. Wyznacz zbiór punktów ciągłości funkcji f jako przekształcenia z $(\mathbb{R}^2, d_k)$ w $(\mathbb{R}^2, d_r)$, gdzie d_k oznacza metrykę kolejową, zaś d_r metrykę rzeka na płaszczyźnie.

Zadanie 3. (10 punktów)

(a) Niech X będzie przestrzenią topologiczną taką, że zbiór punktów izolowanych tej przestrzeni jest trzelementowy. Udowodnij, że nie istnieje przestrzeń topologiczna Y taka, że X jest homeomorficzna z iloczynem kartezjańskim $Y \times Y$.

(b) Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem przestrzeni topologicznych. Pokaż, że jeśli zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} : X_n \text{ ma co najmniej dwa punkty}\}$$

jest nieskończony, to nieskończony iloczyn kartezjański

$$X_1 \times X_2 \times \dots$$

nie ma punktów izolowanych.

Zadanie 4. (6 punktów) Niech $C_b[0, \infty)$ oznacza zbiór funkcji ciągłych i ograniczonych na $[0, \infty)$ o wartościach rzeczywistych. Na $C_b[0, \infty)$ określamy metrykę supremum d_{sup} , tj.

$$d_{sup}(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, \infty)\}.$$

Niech Y będzie podprzestrzenią przestrzeni $(C_b[0, \infty), d_{sup})$ złożoną z tych funkcji f , dla których istnieje granica $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Udowodnij, że Y jest ośrodkowa.

Wskazówka. Przypominamy następujący znany fakt, będący wnioskiem z twierdzenia Weierstrassa o aproksymacji: Zbiór wielomianów o współczynnikach wymiernych, rozpatrywanych jako funkcje na odcinku domkniętym $[s, t]$, jest zbiorem gęstym w przestrzeni $C_b[s, t]$, ograniczonych funkcji ciągłych na $[s, t]$ o wartościach rzeczywistych.