

# KOŁOKWIUM, Topologia I, 19.11.18, TEMAT A

UWAGA: Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każda kartkę z rozwiązaniami podpisujemy podając: imię i nazwisko, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej i nazwisko prowadzącego oraz temat kolokwium (A lub B). **Dla wszystkich odpowiedzi należy podać uzasadnienie.**

**Zadanie 1. A.** (15pkt). Niech  $A = Q \cap (0, 1]$  i niech  $d_k$  i  $d_r$  będą odpowiednio metrykami kolejową i rzeczną na płaszczyźnie  $R^2$ . Zdefiniujmy podzbiór  $X \subset R^2$  wzorem

$$X = \left( \bigcup_{q \in A} \{q\} \times (0, q) \right) \cup ([0, 1] \times \{0\}).$$

Czy punkt płaszczyzny  $(1/3, 1/3)$  należy do domknięcia  $X$  w topologiach generowanych przez każdą z tych metryk? Znaleźć  $\text{Int} X$  w obu topologiach.

**B.** (10pkt). Niech  $\mathcal{T}$  będzie rodziną podzbiorów  $U$  prostej  $R$  takich, że  $R \setminus U$  jest skończony lub przeliczalny. Uzasadnić, że rodzina  $\mathcal{T}$  po dołączeniu do niej zbioru pustego definiuje topologię na prostej  $R$ . Znaleźć domknięcie zbioru liczb niewymiernych w tej topologii.

**Zadanie 2. A.** (10pkt). Niech  $f : R^2 \rightarrow R^2$  będzie funkcja zdefiniowana wzorem  $f(x, y) = (x + 1, 2x)$ . Sprawdzić ciągłość funkcji  $f$  w punktach  $(-1, -1)$  i  $(-2, 0)$  w przypadku gdy w dziedzinie funkcji mamy topologię indukowaną przez metrykę rzeczną a w przeciwdziedzinie metrykę kolejową.

**B.** (15pkt). Niech  $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset R^2$  i  $Y = [-1, 0] \times [-1, 0] \subset R^2$ . Funkcja  $f : R^2 \rightarrow R^2$ ,  $f((x, y)) = (-x, -y)$  odwzorowuje  $X$  w  $Y$  i  $Y$  w  $X$ . Rozpatrzmy na  $X$  topologię kwadratu leksykograficznego a na  $Y$  topologię euklidesową. Czy któreś z odwzorowań  $f : X \rightarrow Y$  i  $f : Y \rightarrow X$  jest ciągle? Przeanalizować to samo pytanie, gdy obie funkcje ograniczymy do kwadratów bez brzegu.

**Zadanie 3.** (25pkt). Niech  $B = Q \cap [0, 1]$ , a  $N$  oznacza zbiór liczb naturalnych. Zdefiniujmy trzy podzbiory prostej euklidesowej  $X_1 = B \cup \{-1/n; n = 1, 2, \dots\}$ ,  $X_2 = B \cup \{-1/n; n = 1, 2, \dots\} \cup \{1 + 1/n; n = 1, 2, \dots\}$ ,  $X_3 = B \cup N$ . Czy istnieją indeksy  $j$  i  $k$  takie, że przestrzeń  $X_j$  jest homeomorficzna z  $X_k$ ?

**Zadanie 4. A.** (10pkt). W kwadracie leksykograficznym znaleźć domknięcie zbioru  $(1/2, 2/3] \times 0$ . Czy podzbiór  $[1/2, 2/3] \times 0$  kwadratu leksykograficznego jest zwarty?

**B.** (15pkt). Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie ciągłym przekształceniem przestrzeni Hausdorffa  $X$  na przestrzeń metryczną  $Y$ , przeprowadzającym zbiory domknięte w  $X$  na zbiory domknięte w  $Y$ . Niech ciąg  $y_n \in Y$ ,  $n = 1, 2, \dots$  zbiega do  $y_0 \in Y$ . Wykazać, że jeśli każdy zbiór  $f^{-1}(y_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  jest zwarty, to także suma  $\bigcup_0^\infty f^{-1}(y_n)$  jest zbiorem zwartym.