

Topologia I
Kolokwium 2013-12-13, Grupa A
Rozwiązania zadań

Zad. 1 (5 pkt.). Rozważmy następujące topologie na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$:

- 1) Topologię produktu prostej euklidesowej i prostej z topologią lewej strzałki:
 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{es}) := (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$.
- 2) Topologię motylków Niemyckiego $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_N)$
- 3) Topologię kolejową $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_k)$.

W poniższej tabeli należy wypełnić każdą kratkę wpisując **TAK**, **NIE** lub ? (nie wiem) w zależności od tego, czy wyszczególniona w nazwach kolumn przestrzeń posiada odpowiednią własność wymienioną w wierszach.

Własność / Przestrzeń	$(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{es})$	$(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_N)$	$(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_k)$
Jest przestrzenią Hausdorffa	TAK	TAK	TAK
Posiada bazę przeliczalną	NIE	NIE	NIE
Jest przestrzenią ośrodkową	TAK	TAK	NIE
Jest przestrzenią zwartą	NIE	NIE	NIE
Jest przestrzenią spójną	TAK	TAK	TAK
Jest przestrzenią metryzowalną	NIE	NIE	TAK

Czy odwzorowanie $f: (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_i) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_j)$ dane wzorem $f(x, y) := (x, -y)$ gdzie $\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j \in \{\mathcal{T}_{es}, \mathcal{T}_N, \mathcal{T}_k\}$ jest ciągłe? W odpowiednie kratki wpisz odpowiedź **TAK**, **NIE** lub ? (nie wiem). W nazwach wierszy są nazwy dziedzin odwzorowania, w kolumnach przeciwdziedzin:

Dziedzina/Przeciwdz.	do $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{es})$	do $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_N)$	do $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_k)$
$z(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{es})$	NIE	NIE	NIE
$z(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_N)$	NIE	TAK	NIE
$z(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_k)$	NIE	NIE	TAK

Zad. 2 (4 pkt.). Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną, $A \subset X$ będzie jej podzbiorem oraz $q: X \rightarrow X/A$ projekcją na zbiór klas abstrakcji relacji $x_1 \sim x_2 \iff x_1 = x_2$ lub $x_1, x_2 \in A$. Udowodnić, że jeśli przestrzeń ilorazowa $(X/A, \mathcal{T}_*(q))$ jest antydyskretna to $A \subset X$ jest podzbiorem gęstym w $(X, \mathcal{T})$.

Dowód. Załóżmy, że A nie jest podzbiorem gęstym, wówczas istnieje niepusty zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że $U \cap A = \emptyset$. Wówczas $q(U)$ jest zbiorem otwartym w X/A . Istotnie, $q^{-1}(q(U)) = U$, gdyż odwzorowanie q obcięte do $X \setminus A$ jest różnowartościowe oraz $q(U) \cap q(A) = \emptyset$. Ponadto, $q(U)$ jest zbiorem niepustym i różnym od X/A . Otrzymaliśmy sprzeczność bo X/A jest przestrzenią antydyskretną. $\square$

Zad. 3 (3A, 7 pkt.). Rozpatrzmy podzbiór płaszczyzny

$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ lub } x^2 + (y + 1)^2 = 1\}$ i następujące przestrzenie topologiczne:

- 1) $(X_1, \mathcal{T}_1)$ gdzie $X_1 := A$ a $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_e|_A$, gdzie $\mathcal{T}_e$ jest topologią euklidesową;
- 2) $(X_2, \mathcal{T}_2)$ gdzie $X_2 := A$ a $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_N|_A$, gdzie $\mathcal{T}_N$ jest topologią płaszczyzny Niemyckiego;
- 3) $(X_3, \mathcal{T}_3)$ gdzie $X_3 := A$ a $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_k|_A$, gdzie $\mathcal{T}_k$ jest topologią kolejową.
- 4) $(X_4, \mathcal{T}_4)$ gdzie $X_4 := \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 \mid z_1 = 1 \text{ lub } z_2 = 1\}$ z topologią $\mathcal{T}_4$ – podprzestrzeni iloczynu kartezjańskiego okręgów euklidesowych.

W poniższej tabeli wypełnij każdą kratkę wpisując **TAK**, **NIE** lub ? (nie wiem) zależnie od tego czy odpowiednie przestrzenie są homeomorficzne.

Homeo	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	TAK	NIE	NIE	TAK
X_2	*	TAK	NIE	NIE
X_3	*	*	TAK	NIE
X_4	*	*	*	TAK

Które z ww. przestrzeni są zwarte, a które spójne? W poniższej tabeli wypełnij każdą kratkę wpisując **TAK**, **NIE** lub ? (nie wiem).

	zwarta	spójna	liczba składowych spójnych
X_1	TAK	TAK	1
X_2	NIE	NIE	3
X_3	NIE	NIE	<i>continuum</i>
X_4	TAK	TAK	1

Uzasadnij odpowiedzi dotyczącą spójności przestrzeni $(X_3, \mathcal{T}_3)$ i zwartości przestrzeni $(X_2, \mathcal{T}_2)$.

Spójność. Pokażemy, że przestrzeń X_3 ma nieskończenie wiele składowych spójności. Niech (x, y) będzie dowolnym punktem należącym do X_3 różnym od punktu $(0, 0)$. Wówczas (x, y) jest przecięciem przestrzeni X_3 ze zbiorem otwartym postaci $\{t(x, y) : t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ dla pewnego $\epsilon > 0$. Zatem składowe spójności zbioru X_3 są jednopunktowe i jest ich *continuum*. $\square$

Zwartość. Udowodnimy, że przestrzeń X_2 nie jest zwarta. W tym celu skonstruujemy pokrycie, z którego nie da się wybrać podpokrycia skończonego. Niech M będzie motylkiem o środku w punkcie $(0, 0)$ a dokładniej $M := B((0, 1/2), 1/2) \cup (0, 0) \cup B((0, -1/2), 1/2)$. Wówczas $M \cap X_2 = (0, 0)$. Rozpatrzmy zbiór $A \setminus (0, 0)$ z topologią euklidesową. Nie jest on zwarty, gdyż nie jest domknięty, zatem istnieje jego euklidesowe pokrycie $\{U_s\}_{s \in S}$, z którego nie da się wybrać podpokrycia skończonego. Dla każdego $s \in S$ niech $U'_s := U_s \setminus (\{y = 0\} \cup \overline{M})$ gdzie $\overline{M}$ jest domknięciem motylka w topologii euklidesowej. Wówczas $\{U'_s\}_{s \in S}$ jest otwartym pokryciem zbioru $A \setminus (0, 0)$ z topologią euklidesową, z którego nie da się wybrać podpokrycia skończonego. Zatem $\{\{U'_s\}_{s \in S}, M\}$ jest pokryciem zbioru A z topologią Niemyckiego, z którego nie da się wybrać podpokrycia skończonego. Zatem X_2 nie jest zwarta. $\square$

Zad. 4 (4 pkt.). Dla dowolnej liczby $-1 \leq t \leq 1$ niech $I(t)$ będzie odcinkiem o końcach w punktach $(t, -1)$ i $(t, 1)$ z topologią podprzestrzeni płaszczyzny z topologią kolejową. Odpowiedz na pytania (**niepotrzebne skreślić**) i podaj uzasadnienia swoich odpowiedzi:

1. Czy dla dowolnych liczb t, t' podprzestrzenie $I(t)$ i $I(t')$ są homeomorficzne?

TAK NIE NIE WIEM

Dowód. Przestrzeń $I(0)$ jest spójna, a dla dowolnego $t \neq 0$ przestrzeń $I(t)$ jest dyskretna i nieskończona. $\square$

2. Czy dla nieskończenie wielu wartości t przestrzeń $I(t)$ jest spójna? **TAK NIE NIE WIEM**

Dowód. Przestrzeń $I(t)$ jest spójna dla $t = 0$, dla pozostałych $t \neq 0$ przestrzeń $I(t)$ ma nieskończenie wiele składowych spójności. $\square$

3. Czy przestrzeń $I(t)$ jest zwarta tylko dla skończenie wielu wartości t ?

TAK NIE NIE WIEM

Dowód. Przestrzeń $I(0)$ jest homeomorficzna z odcinkiem euklidesowym $[-1, 1]$ z topologią euklidesową, zatem jest zwarta. Dla $t \neq 0$ przestrzeń $I(t)$ jest dyskretna i nieskończona, zatem nie jest zwarta. $\square$

Zad. 5 (5 pkt.). Niech $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie przekształceniem ciągłym powierzchni walca w prostą euklidesową. Wykazać, że:

- Obraz przekształcenia f jest zbiorem jednopunktowym lub pewnym odcinkiem domkniętym $[a, b]$;
- Dla co najwyżej dwóch punktów prostej $\mathbb{R}$ ich przeciwobraz jest niepustym zbiorem skończonym lub zbiorem przeliczalnym.

Ad 1. Przestrzeń $S^1 \times [0, 1]$ jest produktem przestrzeni zwartych, zatem jest zwarta. Stąd jej obraz w przestrzeni $\mathbb{R}$ jest domknięty i ograniczony. Ponadto $S^1 \times [0, 1]$ jest produktem przestrzeni spójnych, zatem jest spójna. Stąd jej obraz jest spójnym podzbiorem $\mathbb{R}$. Zatem obraz przekształcenia f jest domkniętym odcinkiem lub zbiorem jednopunktowym. $\square$

Ad 2. Pokażemy najpierw, że przestrzeń $S^1 \times [0, 1]$ bez przeliczalnej lub skończonej liczby punktów jest łukowo spójna korzystając z tego, że płaszczyzna euklidesowa po usunięciu przeliczalnej liczby punktów jest łukowo spójna (Seria 3, Zad. 11). Istnieje bowiem odwzorowanie ciągłe $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times [0, 1]$ dane wzorem $p(t_1, t_2) := (\cos 2\pi t_1, \sin 2\pi t_1, |\sin 2\pi t_2|) = (e^{2\pi i t_1}, |\sin 2\pi t_2|)$. Dla dowolnego punktu (z, t) przeciwobraz $p^{-1}(z, t)$ jest zbiorem przeliczalnym, a więc przeciwobraz dowolnego podzbioru przeliczalnego $C \subset S^1 \times [0, 1]$ jest przeliczalny. Ponieważ p jest surjekcją zachodzi równość $p(\mathbb{R}^2 \setminus p^{-1}(C)) = S^1 \times [0, 1] \setminus C$. Ponieważ zbiór $\mathbb{R}^2 \setminus p^{-1}(C)$ jest łukowo spójny, a więc jego ciągły obraz jest także łukowo spójny.

Udowodnimy teraz, że dla co najwyżej dwóch punktów prostej $\mathbb{R}$ ich przeciwobraz jest niepustym zbiorem skończonym lub zbiorem przeliczalnym. Jeśli obraz f jest zbiorem jednopunktowym, to nie ma czego dowodzić, założymy, że $f(S^1 \times [0, 1]) = [a, b]$. Przypuścimy, że istnieje $t \in (a, b)$ takie, że przeciwobraz $f^{-1}(t)$ jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym. Wówczas $S^1 \times [0, 1] \setminus f^{-1}(t)$ jest spójna, zaś jej obraz $[a, b] \setminus \{t\}$ jest niespójny, sprzeczność. Zatem przeciwobraz może być zbiorem skończonym lub przeliczalnym jedynie dla końców odcinka, czyli punktów a i b . $\square$