

EGZAMIN, TOPOLOGIA I, 08.02.24.

UWAGA: Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę z rozwiązaniami należy podpisać podając imię i nazwisko, numer indeksu oraz numer grupy lub nazwisko prowadzącego ćwiczenia. **Dla wszystkich odpowiedzi należy podać uzasadnienie.**

1. Dla punktów p, q płaszczyzny euklidesowej R^2 i liczby rzeczywistej r niech $I(p, q)$ oznacza odcinek domknięty łączący punkty p i q a $O(p, r)$ oznacza okrąg o środku w p i promieniu r . Niech X będzie podzbiorem przestrzeni euklidesowej R^2 zdefiniowanym jako

$$X = O((1, 0), 1) \cup I((-3, 0), (-2, 0)) \cup \bigcup_{n \in N} O((0, 0), 2 + 1/n)$$

gdzie $N = \{1, 2, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

(A.) Udowodnij, że X jest zbiorem spójnym.

(B.) Udowodnij, że X nie jest zbiorem łukowo spójnym.

2. Niech d_k będzie metryką kolejową, a d_r metryką rzeka. Rozważmy zbiór

$$X = \bigcup_{q \in Q \cap (0, 1)} \{(x, y) \in R^2 \mid y = qx, x \in (0, 1)\}.$$

(A.) Sprawdź, czy przestrzeń (X, d_k) jest przestrzenią zupełną. Jeśli (X, d_k) nie jest zupełna to sprawdź czy jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny.

(B.) Sprawdź, czy przestrzeń (X, d_r) jest przestrzenią zupełną. Jeśli (X, d_r) nie jest zupełna to sprawdź czy jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny.

3. Niech $f : R \setminus Q \rightarrow Q$ będzie funkcją ciągłą (w dziedzinie i przeciwdziedzinie funkcji mamy topologię indukowaną z topologii euklidesowej na prostej R). Wykaż, że istnieje niepusty przedział $(a, b) \subset R$ taki, że f jest stała na zbiorze $(a, b) \setminus Q$.

4. Niech $X = [0, 5] \subset R$ będzie podzbiorem prostej z topologią euklidesową. Zdefiniujmy dwa podzbiory w X :

$$A = (0, 2] \quad i \quad B = [1, 2] \cup [3, 4].$$

- Sprawdź, czy przestrzeń ilorazowa X/A jest przestrzenią Hausdorff'a.
- Sprawdź, czy przestrzenie X/A i X/B są łukowo spójne.
- Udowodnij, że przestrzeń ilorazowa X/B nie jest przestrzenią ściągającą.