

EGZAMIN, TOPOLOGIA I, 08.02.23.

UWAGA: Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę z rozwiązaniami należy podpisać podając imię i nazwisko, numer indeksu oraz numer grupy lub nazwisko prowadzącego ćwiczenia. **Dla wszystkich odpowiedzi należy podać uzasadnienie.**

1. Dla liczb wymiernych $q \in Q \cap (-1, 1)$ niech $I_q = \{(q, t) \in R^2 \mid |t| \leq q\}$. Niech

$$X = \bigcup_{q \in Q \cap (-1, 1)} I_q \cup ([-1, 1] \times \{0\}) \cup ([-1, 1] \times \{1\})$$

(A.) Udowodnić, że X jest zbiorem spójnym.

(B.) Udowodnić, że X nie jest zbiorem łukowo spójnym.

2. Niech $X = \{(x, y) \in R^2 \mid x = 1/n, -1/n < y < 1/n, n = 1, 2, \dots\}$

(A.) Czy zbiór X jest przestrzenią zupełną jako podzbiór (R^2, d_k) (d_k - metryka kolejowa). Jeśli tak nie jest to proszę sprawdzić czy zbiór X z topologią generowaną przez metrykę d_k jest przestrzenią topologiczną metryzowalną w sposób zupełny.

(B.) Czy X jest przestrzenią zupełną jako podzbiór (R^2, d_r) (d_r - metryka rzeka). Jeśli tak nie jest to proszę sprawdzić czy zbiór X z topologią generowaną przez metrykę d_r jest przestrzenią topologiczną metryzowalną w sposób zupełny.

3. Niech F będzie zbiorem domkniętym i brzegowym zawartym w odcinku $[0, 1]$. Dla $q \in Q$ zdefiniujmy podzbiór płaszczyzny euklidesowej

$$K_q = \{(\cos 2\pi(t + q), \sin 2\pi(t + q)) \mid t \in F\} \subset S^1.$$

Niech

$$K = \bigcup_{q \in Q} K_q$$

Udowodnić, że istnieje prosta L w R^2 przechodząca przez punkt $(0, 0)$ taka, że $L \cap K = \emptyset$.

4. (A.) Niech X będzie przestrzenią topologiczną, I odcinkiem domkniętym $[0, 1]$. Rozważmy przestrzeń $X \times I$ oraz jej podzbiór $A = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$. Pokazać, że przestrzeń ilorazowa $Y = X/A$ jest łukowo spójna.

(B.) Udowodnić, że Y nie jest przestrzenią ściągającą.

Wskazówka do części (B). Np. wystarczy pokazać, że istnieje odwzorowanie $S^1 \rightarrow Y$, które nie jest homotopijne z odwzorowaniem stałym.