

EGZAMIN POPRAWKOWY, Topologia I, 23.02.19

UWAGA: Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę z rozwiązaniami podpisujemy podając: imię i nazwisko, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej i nazwisko prowadzącego. **Dla wszystkich odpowiedzi należy podać uzasadnienie.**

Zadanie 1. A. (15pkt). Niech $S = (-1, 1) \cap \mathbb{Q}$ (liczby wymierne z odcinka otwartego $(-1, 1)$). Niech $I(a, b)$ oznacza odcinek domknięty o końcach w punktach a, b . Zdefiniujmy zbiór X

$$X = \left([-1, 1] \times \{0\} \cup \bigcup_{p \in S} I((p, -p), (p, p)) \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Zbadać, czy przestrzeń X jest metryzowalna w sposób zupełny.

B. (10pkt). Niech S będzie zbiorem zdefiniowanym powyżej a $T = C \cup -C \subset [-1, 1]$, gdzie C jest zbiorem Cantora na odcinku $[0, 1]$. Przypomnijmy, że

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Udowodnić, że istnieje punkt $t \in S^1$ taki, że t nie leży na żadnym odcinku łączącym punkt ze zbioru $S \times \{2\} \subset \mathbb{R}^2$ z punktem ze zbioru $T \times \{-2\} \subset \mathbb{R}^2$. Przypomnienie: $-C = \{a \in \mathbb{R} \mid -a \in C\}$.

Zadanie 2. A. (15pkt). Niech X będzie zbiorem zdefiniowanym w zadaniu 1.A. Zdefiniujmy podzbiór $Y \subset \mathbb{R}^2$ w następujący sposób:

$$Y = X \cup [-1, 1] \times \{1\}$$

Udowodnić, że Y jest zbiorem spójnym.

B. (10pkt). Niech $Z = \bar{X} \cup [-1, 1] \times \{1\}$, gdzie $\bar{X}$ oznacza domknięcie X w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$. Udowodnić, że Z jest przestrzenią łukowo spójną i uzasadnić, że Z nie jest przestrzenią ściągłą.

Zadanie 3. A. (15pkt). Udowodnić, że przestrzeń ilorazowa $[0, 1]/[0, 2/3]$ nie ma własności Hausdorffa.

B. (10pkt). Wykazać, że butelka Kleina B^2 jest homeomorficzna z przestrzenią otrzymaną ze sklejenia dwóch wstęg Möbiusa M^2 wzdłuż identyczności na brzegu ($\partial M^2 = S^1$).

Zadanie 4. A. (15pkt). Niech $\pi : S^2 \rightarrow S^2 / \sim$ będzie przekształceniem ilorazowym, gdzie relacja " $\sim$ " polega na utożsamieniu punktów antypodycznych ($S^2 / \sim = \mathbb{R}P^2$). Pokazać, że przekształcenie $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ określone formułą $f(x, y) = \pi(0, x, y)$ jest homotopijne z odwzorowaniem stałym.

B. (10pkt). Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Udowodnić, że odwzorowanie $f : S^1 \rightarrow X$ jest homotopijne z odwzorowaniem stałym wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciągłe $F : D^2 \rightarrow X$ takie, że obcięcie F do brzegu D^2 jest równe f ($\partial D^2 = S^1$).