

TOPOLOGIA I, 2013Z. Egzamin. II termin 2014-03-03

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Stwierdź, czy następujące zdania są prawdziwe, zakreślając kółkiem właściwą odpowiedź i skreślając pozostałe. Jeśli zmieniasz zdanie, napisz obok właściwą odpowiedź, skreślając wszystkie pozostałe. Punktacja: 1 poprawna odp, -0,5 błędna, 0 nie wiem

Pytanie 1. Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem gęstym w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$, to dla dowolnego zbioru otwartego $U \in \mathcal{T}$ zbiór $A \cap U$ jest gęsty w podprzestrzeni $(U, \mathcal{T}|U)$.

TAK NIE NIE WIEM

Pytanie 2. Niech $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$ będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Jeżeli $A \times B$ jest spójnym podzbiorem $X \times Y$, to $A \subset X$ i $B \subset Y$ są podzbiórami spójnymi.

TAK NIE NIE WIEM

Pytanie 3. Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną taką, że topologia $\mathcal{T}(d)$ wyznaczona przez metrykę d jest dyskretna, to istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych dwóch różnych punktów $x_1, x_2 \in X$ zachodzi $d(x_1, x_2) > \delta$.

TAK NIE NIE WIEM

Pytanie 4. Jeśli metryzowalna przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest ośrodkowa, to dla dowolnego podzbioru $A \subset X$ podprzestrzeń $(A, \mathcal{T}|A)$ też jest ośrodkowa.

TAK NIE NIE WIEM

Pytanie 5. Jeśli przestrzeń topologiczna zawiera łukowo spójny podzbiór gęsty to jest łukowo spójna.

TAK NIE NIE WIEM

Pytanie 6. Płaszczyzna euklidesowa przekłuta w dwóch punktach $(\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}, \mathcal{T}_e)$ jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny.

TAK NIE NIE WIEM

Pytanie 7. Jeśli $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłą surjekcją oraz przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest ściągalna, to przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ściągalna.

TAK NIE NIE WIEM

Pytanie 8. Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych z topologią dyskretną. Podzbiór

$$A := \{(n_1, n_2, \dots) \in \prod_{i=1}^{+\infty} \mathbb{Z} : \exists_i n_i \text{ jest liczbą parzystą}\} \subset \prod_{i=1}^{+\infty} \mathbb{Z}$$

jest domknięty w topologii produktowej.

TAK NIE NIE WIEM

Pytanie 9. Jeśli przestrzenie topologiczne $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ są homotopijnie równoważne oraz przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest zwarta, to przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ też jest zwarta.

TAK NIE NIE WIEM

Pytanie 10. Każdy ściągalny podzbiór płaszczyzny euklidesowej jest zbiorem gwiazdzistym.

TAK NIE NIE WIEM

TOPOLOGIA I, 2013Z. Egzamin. II termin 2014-03-03

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Stwierdź czy następujące zdania są prawdziwe, zakreślając kółkiem właściwą odpowiedź i skreślając pozostałe. Jeśli zmieniasz zdanie, napisz obok właściwą odpowiedź, skreślając wszystkie pozostałe. Uzasadnij odpowiedzi.

Punktacja: 1 pkt. poprawna odp, -0,5 błędna, 0 nie wiem, uzasadnienie 0 - 4 pkt.

Pytanie 11. Niech $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ będzie prostą z topologią prawej strzałki tzn. generowaną przez odcinki $[a, b)$ w której zadana jest relacja równoważności $t_1 \sim t_2 \iff \exists_{n \in \mathbb{Z}} t_1 = t_2 + n$ ($\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych). Czy przestrzeń ilorazowa $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)/\sim$ jest zwarta?

TAK NIE NIE WIEM

Uzasadnienie

Pytanie 12. Dowolna metryka wyznaczająca topologię euklidesową na walcu $S^1 \times \mathbb{R}$ jest zupełna.

TAK NIE NIE WIEM

Uzasadnienie

Pytanie 13. W przestrzeni funkcji ciągłych $C([0, 1])$ na odcinku euklidesowym o wartościach rzeczywistych z metryką d_{sup} zbiór funkcji $F := \{f \in C(I) \mid f(0) \neq 0\}$ jest spójny.

TAK NIE NIE WIEM

Uzasadnienie

TOPOLOGIA I, 2013Z. Egzamin. I termin, 2014-02-03

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Pytanie 14. Odwzorowania $\alpha_1, \alpha_2: S^1 \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ dane wzorami $\alpha_1(z) = (z^2, \operatorname{Re}(z))$, $\alpha_2(z) = (z, \operatorname{Im}(z))$ są homotopijne.

TAK NIE NIE WIEM

Uzasadnienie

Pytanie 15. Przekłuta wstęga Möbiusa bez brzegu jest ściągalna.

TAK NIE NIE WIEM

Uzasadnienie

Topologia I, 2013Z. Egzamin. II termin 2014-03-03

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Zad. 1 (8 pkt). Niech $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie przestrzenią spójną a $p: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie odwzorowaniem ilorazowym (tzn. surjekcją taką, że $V \in \mathcal{T}_Y \iff p^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$) takim, że dla każdego $y \in Y$ podzbiór $f^{-1}(y)$ jest spójny.

1. Wykaż, że przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest spójna.
2. Wskazać przykład dowodzący, że pkt. a) nie jest prawdziwy jeśli zastąpić w założeniach i w tezie spójność przez łukową spójność.

Topologia I, 2013Z. Egzamin. II termin 2014-03-03

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Zad. 2 (8 pkt). Dla dowolnego podzbioru $A \subset S^1 \subset \mathbb{C}$ i podzbioru $B \subset \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\} \subset \mathbb{R}$ zdefiniujmy podzbiór płaszczyzny $X(A, B) := \bigcup_{z \in A} \{tz \mid t \in B\}$. Wykaż, że:

- a) Zbiór $X(A, B)$ jest spójny wtedy i tylko wtedy gdy zbiory A, B są spójne.
- b) Zbiór $X(A, B)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy zbiory A, B są zwarte.
- c) Metryka euklidesowa na $X(A, B)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy gdy zbiory $A \subset S^1, B \subset \mathbb{R}$ są domknięte.

Topologia I, 2013Z. Egzamin. II termin 2014-03-03

Imię i Nazwisko studenta [DRUKOWANE]: _____

Nr albumu: _____ Nazwisko prowadzącego ćwiczenia: _____ Nr grupy: _____

Zad. 3 (9 pkt). Na sferze euklidesowej $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ utożsamiamy do punktu dwa bieguny, czyli zbiór $B := \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$. i rozważamy przestrzeń ilorazową $X := S^2/B$. Wykaż, że:

- a) Przestrzeń X jest zwarta i łukowo spójna.
- b) Przestrzeń X nie jest homeomorficzna ze sferą S^2 .
- c) Zdefiniuj relację równoważności $\sim$ na torusie $T := S^1 \times S^1$ taką, żeby przestrzeń ilorazowa $T/\sim$ była homeomorficzna z przestrzenią X (szczegółowy dowód homeomorfizmu nie jest oczekiwany, rysunek mile widziany).
- d) Wskaż podzbiór $S \subset X$ homeomorficzny z okręgiem oraz retrakcję $r: X \rightarrow S$ (można podać opis analityczny lub geometryczny).